

Corrigé de l'épreuve de Math-Info, ENS 2004

1 Quelques calculs matriciels

1.1. Soit i tel que $1 \leq i < k$. Si $v_i = 0$, v' et v_i sont orthogonaux. Sinon, on a :

$$v_i \cdot v' = v_i \cdot v - \left(\sum_{\substack{1 \leq j < k \\ j \neq i \text{ et } v_j \neq 0}} \frac{v_j \cdot v}{|v_j|^2} \underbrace{(v_i \cdot v_j)}_{=0} \right) - \frac{v_i \cdot v}{|v_i|^2} (v_i \cdot v_i) = v_i \cdot v - v_i \cdot v = 0$$

et v' et v_i sont également orthogonaux.

1.2. En supposant que (A, m, n, k) vérifie les hypothèses demandée, et en notant $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v$ les k premiers vecteurs colonnes de A , l'instruction $GS1(A, m, n, k)$ remplace dans A le vecteur v par le vecteur v' défini en 1. Pour chaque j , la boucle en i calcule $s = v_j \cdot v$ et $x = |v_j|^2$: si x est non nul, la seconde boucle en i retranche à la k -ème colonne de A le vecteur $\frac{v_i \cdot v}{|v_i|^2} v_i$.

1.3. Notons v_1, v_2, \dots, v_n les colonnes initiales de A . Il est facile de vérifier l'invariant de boucle : à la fin de la k -ème boucle, les k premiers vecteurs colonnes de A forment une famille orthogonale qui engendre le même espace vectoriel que (v_1, \dots, v_k) et les $n - k$ derniers vecteurs colonnes de A n'ont pas été modifiés (on peut en passant remarquer que le premier passage dans la boucle n'a aucune action). À la fin du calcul, les colonnes de A forment donc une base orthogonale de l'espace engendré par les colonnes initiales.

Il existe une constante M telle que le nombre d'opérations élémentaires effectués par $G(A, n, m, k)$ est majoré par Mkm . On en déduit que le nombre d'opérations élémentaires effectuées par l'appel $GS(A, m, n)$ est majoré par $Mm(1 + 2 + \dots + n) = \frac{Mmn(n+1)}{2}$: c'est donc un $O(mn^2)$.

1.4. En appliquant GS à A , on ne modifie pas le rang de la matrice ; comme les nouvelles colonnes sont orthogonales, le rang de la matrice initiale est donc égal au nombre de colonnes non nulles de la matrice finale. La formule du rang prouve alors que la dimension cherchée est le nombre de colonne nulle de la matrice finale. En un temps $O(n^2m)$, on applique donc la fonction GS à A , puis un temps $O(nm)$ permet de compter le nombre de colonnes nulles : on obtient ainsi le résultat demandé en un temps $O(n^2m)$.

1.5. Il suffit de construire la transposée de A (en temps $O(nm)$), puis de lui appliquer l'algorithme de la question précédente pour calculer $\dim(\text{Ker } A) = \dim(\text{Ker } A^t)$ en temps $O(m^2n)$: le temps de calcul total est bien un $O(m^2n)$.

1.6. Il suffit de comparer m et n : si $n \leq m$, on applique l'algorithme de la question 4. Sinon, on applique celui de la question 5.

2 Complexes simpliciaux et homologie

Pour simplifier l'écriture, j'identifie $\alpha \in K$ et $\hat{\alpha} : K_p$ est ainsi une base de C_p .

2.1. Notons $\alpha = \{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ avec $x_0 < x_1 < \dots < x_p$. Comme $i < j$, le i -ème élément du simplexe $\partial_p^j \alpha$ est

x_i et le $(j-1)$ -ème élément de $\partial_p^i \alpha$ est x_j . Cela donne

$$\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_p\} = \partial_{p-1}^{j-1} \partial_p^i \alpha$$

2.2. Pour $\alpha \in K_p$, nous avons :

$$\begin{aligned} d_{p-1} \circ d_p(\alpha) &= d_{p-1} \left(\sum_{j=0}^p (-1)^j \partial_p^j \alpha \right) = \sum_{j=0}^p (-1)^j d_{p-1} (\partial_p^j \alpha) \\ &= \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i+j} \partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha + \sum_{0 \leq j \leq i \leq p-1} (-1)^{i+j} \partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \partial_{p-1}^{j-1} \partial_p^i \alpha + \sum_{0 \leq j \leq i \leq p-1} (-1)^{i+j} \partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha \\ &= \sum_{0 \leq i \leq k \leq p-1} (-1)^{i+k+1} \partial_{p-1}^k \partial_p^i \alpha + \sum_{0 \leq j \leq i \leq p-1} (-1)^{i+j} \partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha \quad (\text{en posant } k = j-1) \\ &= - \sum_{0 \leq i \leq j \leq p-1} (-1)^{i+j} \partial_{p-1}^j \partial_p^i \alpha + \sum_{0 \leq i \leq j \leq p-1} (-1)^{i+j} \partial_{p-1}^j \partial_p^i \alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $d_{p-1} \circ d_p = 0$ (l'application linéaire est nulle sur une base de C_p), soit $\text{Im } d_p \subset \text{Ker } d_{p-1}$.

2.3. Nous obtenons facilement, en remarquant que toutes les sommes sont en fait finies :

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \beta_p &= \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p (\dim Z_p - \dim B_p) = \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p (\dim C_p - \text{rg}(d_p) - \text{rg}(d_{p+1})) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \text{card } K_p - \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \text{rg}(d_p) + \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (-1)^p \text{rg}(d_p) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \text{card } K_p - \text{rg}(d_0) \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème d'Euler-Poincaré ($C_{-1} = 0$, donc $\text{rg}(d_0) = 0$).

2.4. Choisissons $(\{u\}, \{v\}, \{w\})$ et $(\{v, w\}, \{u, w\}, \{u, v\})$ pour bases de C_0 et C_1 respectivement (les autres C_p sont réduits à 0). Comme $d_1(\{v, w\}) = \{w\} - \{v\}$, $d_1(\{u, w\}) = \{w\} - \{u\}$ et $d_1(\{u, v\}) = \{v\} - \{u\}$, la matrice de d_1 dans les bases choisies est :

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\dim B_0 = \text{rg}(D_1) = 2$ et $\dim Z_1 = \dim(\text{Ker } D_1) = 1$. Comme $C_{-1} = C_2 = 0$, $Z_0 = C_0$ et $B_1 = 0$: cela donne $\beta_0 = \beta_1 = 1$, puis $\beta_p = 0$ pour $p \geq 2$. La caractéristique d'Euler du simplexe est nulle (elle vaut $3 - 3$ ou $1 - 1$).

3 Calcul des nombres de Betti

3.1. Nous avons pour $X \in C_p$:

$$\begin{aligned}
 X \in H_p &\iff X \in Z_p \text{ et } X \in (\text{Im } d_{p+1})^\perp \\
 &\iff d_p X = 0 \text{ et } [\forall Y \in C_{p+1}, (d_{p+1} Y)^t X = 0] \\
 &\iff d_p X = 0 \text{ et } [\forall Y \in C_{p+1}, Y^t (d_{p+1}^t X) = 0] \\
 &\iff d_p X = 0 \text{ et } d_{p+1}^t X \in C_{p+1}^\perp = \{0\} \\
 &\iff X \in \text{Ker} \begin{bmatrix} d_{p+1}^t \\ d_p \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La preuve fonctionne également quand $p = 0$, la matrice d_p étant “vide” (elle n’a aucune ligne).

3.2. Il suffit donc de construire la matrice $\begin{bmatrix} d_{p+1}^t \\ d_p \end{bmatrix}$ et de lui appliquer l’algorithme de la question 1.6 pour obtenir le nombre de Betti β_p . Cela donne :

```

BETTI(n,c,face,p)
si p>n alors
  0
sinon
  si p=0 alors n1 := 0 sinon n1 := c[p-1] fin_si;
  n2 :=c[p];
  si p=n alors n3 := 0 sinon n3 := c[p+1] fin_si;
  A := matrice(n3+n1,n2,0)      (* A est initialis'ee : elle ne contient que des 0 *)
  pour i de 1 \ 'a n3 faire
    epsilon := 1;
    pour j de 0 \ 'a p+1 faire
      A[i,face[p+1,i,j]] := epsilon;
      epsilon := -epsilon;
    fin_pour ;
  fin_pour;
  si p<>0 alors
    pour j de 1 \ 'a n2 faire
      epsilon := 1;
      pour i de 0 \ 'a p faire
        A[n3+face[p,j,i],j] := epsilon;
        epsilon := -epsilon;
      fin_pour ;
    fin_pour;
  fin_si;
  dim_ker(A)
fin_si;

```

La matrice construite possède $m = c[p+1] + c[p-1]$ lignes et $n = c[p]$ colonnes. Le remplissage de la matrice A se fait en un temps de l’ordre de nm , qui est négligeable devant le temps de calcul de la dimension du noyau, qui est de l’ordre de $\min(m, n)^2 \max(m, n)$, valeur qui donne donc l’ordre de grandeur du nombre d’opérations élémentaires.

3.3. Nous avons $C_q = C'_q$ pour q différent de p et $C'_p = C_p \oplus \text{Vect}(\gamma)$. Les applications d'_q et d_q coïncident donc

pour $q \neq p$ et d_p est la restriction de d'_p à l'hyperplan C_p de C'_p . Comme les nombres β_q, β'_q ne dépendent que de d_q et d_{q+1} , nous en déduisons que $d_q = d'_q$ pour tout q distinct de p et de $p-1$.

Si γ crée un cycle dans K , d_p et d'_p ont même image, donc même rang. La formule du rang donne donc

$$\dim Z'_p = \dim C'_p - \text{rg } d'_p = \dim C_p + 1 - \text{rg } d_p = \dim Z_p + 1$$

Comme $B'_p = B_p$ (les applications d'_{p+1} et d_{p+1} sont égales), $\beta'_p = \beta_p + 1$. D'autre part, la formule d'Euler-Poincaré donne :

$$(-1)^p = \chi(K') - \chi(K) = (-1)^{p-1}(\beta'_{p-1} - \beta_{p-1}) + (-1)^p(\beta'_p - \beta_p) = (-1)^{p-1}(\beta'_{p-1} - \beta_{p-1}) + (-1)^p$$

d'où $\beta'_{p-1} = \beta_{p-1}$.

Si γ ne crée pas de cycle dans K , $\text{rg } d'_p = (\text{rg } d_p) + 1$, d'où :

$$\dim Z'_p = \dim C'_p - \text{rg } d'_p = \dim C_p + 1 - \text{rg } d_p - 1 = \dim Z_p$$

puis $\beta'_p = \beta_p$. Nous avons cette fois :

$$(-1)^p = \chi(K') - \chi(K) = (-1)^{p-1}(\beta'_{p-1} - \beta_{p-1}) + (-1)^p(\beta'_p - \beta_p) = (-1)^{p-1}(\beta'_{p-1} - \beta_{p-1})$$

d'où $\beta'_{p-1} = \beta_{p-1} - 1$.

3.4. a) Notons $K'' = K \cup \{\alpha\} = K' \setminus \{\beta\}$. Si $\emptyset \neq \gamma \subset \delta$ avec $\delta \in K''$, alors $\gamma \in K'$ (car K' est un complexe simplicial). Si $\gamma = \beta$, $\beta \subset \delta$ impose $\delta \neq \alpha$ (car α est une face de β), i.e. $\delta \in K$, puis $\beta \in K$ (K est un complexe simplicial) : c'est absurde. Ainsi, $\gamma \in K''$ et K'' est un complexe simplicial.

b) Comme $\alpha \notin K \cup \{\beta\}$ et $\emptyset \neq \alpha \subset \beta$, $K \cup \{\beta\}$ n'est pas un complexe simplicial.

c) Soit p la dimension de α . Nous noterons C_q, C'_q et C''_q les espaces vectoriels associés aux complexes simpliciaux K, K' et K'' . Il existe un entier i_0 compris entre 0 et $p+1$ tel que $\alpha = \partial_{p+1}^{i_0} \beta$. L'égalité $d_p \circ d_{p+1}(\beta) = 0$ donne :

$$\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i d_p (\partial_{p+1}^i \beta) = 0$$

soit

$$d_p(\alpha) = d_p \left((-1)^{i_0+1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{p+1} (-1)^i \partial_{p+1}^i \beta \right)$$

Pour i distinct de i_0 , $\partial_{p+1}^i \beta$ est une face de β distincte de α : elle appartient donc à K_p . On en déduit :

$$(-1)^{i_0+1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{p+1} (-1)^i \partial_{p+1}^i \beta \in C_p$$

et $d_p(\alpha) \in d_p(C_p)$: α crée un cycle dans K .

d) Pour tout $\gamma \in K''_{p+1}$, α n'est pas une face de γ (car $\gamma \in K$ et $\alpha \notin K$) ; on en déduit :

$$d_{p+1}(\gamma) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \underbrace{\partial_{p+1}^i \gamma}_{\in K_p} \in C_p$$

ce qui prouve que $d_{p+1}(C''_{p+1})$ est contenu dans C_p . Par contre :

$$d_{p+1}(\beta) = \underbrace{(-1)^{i_0} \alpha}_{\notin C_p} + \underbrace{\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{p+1} (-1)^i \partial_{p+1}^i \beta}_{\in C_p}$$

donc $d_{p+1}(\beta)$ n'est pas élément de C_p : β ne crée donc pas de cycle dans K'' .

e) En notant β_q , β'_q et β''_q les nombres de Betti des complexes K , K' et K'' , les questions précédentes donnent :

$$\begin{cases} \forall q \neq p, \beta'_q = \beta''_q \\ \beta'_p = \beta''_p - 1 \\ \forall q \neq p, \beta''_q = \beta_q \\ \beta''_p = \beta_p + 1 \end{cases}$$

soit $(\beta_q)_{q \in \mathbb{N}} = (\beta'_q)_{q \in \mathbb{N}}$: les complexes simpliciaux K et K' ont mêmes nombres de Betti.

3.5. Des complexes simpliciaux simplement homotopes ont même nombres de Betti. Par contractions successives associées aux couples $(\{d, e, f\}, \{e, f\})$, $(\{d, f\}, \{f\})$, $(\{e, g\}, \{g\})$, $(\{a, b\}, \{a\})$, $(\{b, d, e\}, \{b, d\})$ et $(\{b, c\}, \{b\})$, nous obtenons que les deux complexes simpliciaux de la figure 1 sont simplement homotopes : ils ont donc mêmes nombres de Betti $(1, 1, 0, 0, \dots)$ et 0 pour caractéristique d'Euler.

4.1. Comme K' est normal, $\alpha \in K'$ et $\alpha \bowtie \beta$ impose $\beta \in K'$. D'autre part, α étant un simplexe de dimension maximale de K' , ce n'est pas une face de β et $\alpha \not\sqsubset \beta$, d'où $\beta \triangleright \alpha$. En particulier, $\dim \beta = (\dim \alpha) - 1$.

Notons $K'' = K' \setminus \{\alpha, \beta\}$. Soient α', β' tels que $\emptyset \neq \beta' \subset \alpha' \in K''$. Comme K' est un sous-complexe, $\beta \in K'$. Si $\beta' = \alpha'$, β' est élément de K'' . Sinon, il est de dimension strictement plus petite que α' , et donc de dimension strictement plus petite que α (par maximalité de α) : β' est donc différent de α . Supposons que $\beta' = \beta$. On a alors $\dim \alpha - 1 = \dim \beta = \dim \beta' < \dim \alpha' \leq \dim \alpha$: α' est donc un élément de A' distinct de α . Comme $\beta \triangleright \alpha$, $\beta \not\sqsubset \alpha'$ et $\beta \sqsubset \alpha'$, ce qui donne $\alpha' \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$: c'est absurde, par définition de $\alpha = \alpha_{\max}(K')$. Ceci prouve que β' est élément de K'' , qui est donc un sous-complexe de K .

Supposons maintenant que $\alpha' \in K''$ et $\beta' \in K$ vérifient $\alpha' \bowtie \beta'$. Comme K' est normal, $\beta' \in K'$. Si β' était égal à α , on aurait $\alpha' \bowtie \alpha$ et $\beta \triangleright \alpha$, d'où $\alpha' = \beta$: c'est absurde. Le même argument prouve que $\beta' \neq \beta$: $\beta' \in K''$ et K'' est normal.

4.2. Notons $K'' = K' \setminus \{\alpha\}$. Soient (β, γ) tels que $\emptyset \neq \gamma \subset \beta \in K''$. Comme K' est un sous-complexe, $\gamma \in K'$; d'autre part, $\gamma \neq \alpha$ (sinon, on aurait $\alpha \subset \beta$, puis $\beta = \alpha$ car $\alpha \in A'$) : γ est élément de K'' , qui est un sous-complexe.

Soit $\beta \in K''$ et $\gamma \in K$ tels que $\beta \bowtie \gamma$. Comme K' est normal, $\gamma \in K'$; on a d'autre part $\gamma \neq \alpha$ car α est critique : K'' est donc normal.

4.3. Il y a un petit oubli dans l'énoncé : $c_p(K')$ est le nombre de simplexes critiques de dimension p de K' . Le résultat se prouve par récurrence sur la taille du sous-complexe K' . Soit donc la propriété :

\mathcal{H}_N : pour tout sous-complexe normal K' de K de cardinal N , on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} c_q(K') \geq \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} \beta_q(K').$$

On peut dès maintenant remarquer que les inégalités précédentes deviennent des égalités pour $m \geq p$ où p est la dimension maximale des simplexes de K' . En effet, si $m \geq p$, les inégalités :

$$\begin{cases} \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} c_q(K') \geq \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} \beta_q(K') \\ \sum_{q=0}^{m+1} (-1)^{m+1-q} c_q(K') \geq \sum_{q=0}^{m+1} (-1)^{m+1-q} \beta_q(K') \end{cases}$$

donnent l'égalité

$$\sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} c_q(K') = \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} \beta_q(K')$$

puisque $c_{m+1}(K') = \beta_{m+1}(K') = 0$.

Si K' est un sous-complexe normal de cardinal 1, $c_0(K') = \beta_0(K') = 1$ et $c_p(K') = \beta_p(K') = 0$ pour tout $p \geq 1$: les inégalités sont clairement vérifiées.

Soit $N \geq 1$ et supposons que \mathcal{H}_k est vérifiée pour tout entier k compris entre 1 et N . Soit K' un sous-complexe normal de K de cardinal $N + 1$. Notons $\alpha = \alpha_{\max}(K')$ et p la dimension de α . Trois cas sont à distinguer :

- Premier cas : α n'est pas critique.

Il existe $\beta \in K'$ tel que $\alpha \bowtie \beta$; considérons alors le sous-complexe normal $K'' = K' \setminus \{\alpha, \beta\}$ (voir question 4.1). D'après la question 3.4, K et K'' ont même nombres de Betti. Comme ils ont également les mêmes nombres de points critiques (ni α , ni β n'étaient critiques), nous avons en appliquant l'hypothèse de récurrence à K'' :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} c_q(K') = \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} c_q(K'') \geq \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} \beta_p(K'') = \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} \beta_p(K')$$

- Deuxième cas : α est critique et crée un cycle dans le sous-complexe normal $K'' = K' \setminus \{\alpha\}$.

Nous avons d'après 3.3 :

$$\begin{cases} c_p(K'') = c_p(K') - 1 \\ c_q(K'') = c_q(K') \text{ pour } q \neq p \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_p(K'') = \beta_p(K') - 1 \\ \beta_q(K'') = \beta_q(K') \text{ pour } q \neq p \end{cases}$$

Comme dans le premier cas, nous obtenons pour $m < p$:

$$\sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} c_q(K') = \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} c_q(K'') \geq \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} \beta_p(K'') = \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} \beta_p(K')$$

Pour $m \geq p$, nous avons cette fois :

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} c_q(K') &= \left(\sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} c_q(K'') \right) + (-1)^{m-p} \\ &\geq \left(\sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} \beta_q(K'') \right) + (-1)^{m-p} = \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} \beta_q(K') \end{aligned}$$

- Troisième cas : α est critique et ne crée pas de cycle dans le sous-complexe normal $K'' = K' \setminus \{\alpha\}$.

Nous avons d'après 3.3 :

$$\begin{cases} c_p(K'') = c_p(K') - 1 \\ c_q(K'') = c_q(K') \text{ pour } q \neq p \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_{p-1}(K'') = \beta_{p-1}(K') + 1 \\ \beta_q(K'') = \beta_q(K') \text{ pour } q \neq p-1 \end{cases}$$

Pour $m < p-1$, nous obtenons directement l'inégalité :

$$\sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} c_q(K') \geq \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} \beta_q(K')$$

Pour $m = p-1$:

$$\sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-1-q} c_q(K') = \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-1-q} c_q(K'')$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left(\sum_{q=0}^{p-2} (-1)^{p-1-q} \underbrace{\beta_q(K'')}_{=\beta_q(K')} \right) + \underbrace{\beta_{p-1}(K'')}_{=\beta_{p-1}(K')+1} \\
&\geq \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-1-q} \beta_q(K'')
\end{aligned}$$

Pour $m = p$:

$$\begin{aligned}
\sum_{q=0}^p (-1)^{p-q} c_q(K') &= \left(\sum_{q=0}^p (-1)^{p-q} c_q(K'') \right) + 1 \\
&= \left(\sum_{q=0}^p (-1)^{p-q} \beta_q(K'') \right) + 1 \\
&= \left(\sum_{\substack{q=0 \\ q \neq p-1}}^p (-1)^{p-q} \underbrace{\beta_q(K'')}_{=\beta_q(K')} \right) + \underbrace{1 - \beta_{p-1}(K'')}_{=-\beta_{p-1}(K')} \\
&= \sum_{q=0}^p (-1)^{p-q} \beta_q(K')
\end{aligned}$$

Cette égalité donne ensuite directement :

$$\forall m \geq p, \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} c_q(K') = \sum_{q=0}^m (-1)^{m-q} \beta_q(K').$$

La propriété \mathcal{H}_{N+1} est donc vérifiée, ce qui achève la preuve par récurrence.

On a ensuite vu que pour m plus grand que la dimension de K' , l'inégalité est en fait une égalité : cela donne exactement l'identité de Morse.

4.4. En appliquant ces inégalités avec $K' = K$ (K est bien un sous-simplexe normal de K), nous avons pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{q=0}^p (-1)^{p-q} c_q(K) \geq \sum_{q=0}^p (-1)^{p-q} \beta_q(K)$$

soit

$$c_p(K) - \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-1-q} c_q(K) \geq \beta_p(K) - \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-1-q} \beta_q(K)$$

puis

$$c_p(K) - \beta_p(K) \geq \left(\sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-1-q} c_q(K) \right) - \left(\sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-1-q} \beta_q(K) \right) \geq 0$$

5.1. Premier cas : $v_{\sigma_\alpha(n)} \in \alpha$.

On pose $\beta = \alpha \setminus \{v_{\sigma_\alpha(n)}\}$: β est l'unique partie de V telle que $\beta \triangleright \alpha$. S'il existait γ tel que $\alpha \triangleright \gamma$, on aurait $v_{\sigma_\gamma(n)} \in \gamma$ et $\alpha = \gamma \setminus \{v_{\sigma_\gamma(n)}\}$. D'après (†), on aurait $\sigma_\alpha(n) = \sigma_\gamma(n)$, ce qui est absurde car $v_{\sigma_\alpha(n)} \in \alpha$ et $v_{\sigma_\gamma(n)} \notin \alpha$. Il existe donc un unique β tel que $\alpha \bowtie \beta$.

Deuxième cas : $v_{\sigma_\alpha(n)} \notin \alpha$.

On pose $\beta = \alpha \cup \{v_{\sigma_\alpha(n)}\}$. Je ne vois pas comment la propriété (§) permet de prouver que $\sigma_\alpha(n) = \sigma_\beta(n)$. Par contre, la construction de σ l'impose : comme α et β ne diffèrent que par l'élément $v_{\sigma_\alpha(n)}$, les $n-1$ premières questions posées par $\text{REC}_K(\alpha)$ et $\text{REC}_K(\beta)$ sont identiques, donc $\sigma_\alpha(k) = \sigma_\beta(k)$ pour tout $k < n$, puis $\sigma_\alpha(n) = \sigma_\beta(n)$ (σ_α et σ_β sont bijectives). Ceci prouve que $\alpha \triangleright \beta$.

Soit γ tel que $\alpha \bowtie \beta$. Comme $v_{\sigma_\alpha(n)} \notin \alpha$, on a nécessairement $\alpha \triangleright \gamma$. Comme dans le premier cas, on a $\sigma_\gamma(n) = \sigma_\alpha(n)$ et $\gamma = \alpha \cup \{v_{\sigma_\gamma(n)}\} = \beta$: β est l'unique élément vérifiant $\alpha \bowtie \beta$.

5.2. Considérons l'ensemble ordonné $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ($n < \infty$ pour tout entier n). Si l'on identifie chaque élément $[n_1, \dots, n_k] \in \mathcal{S}$ à la suite $[n_1, \dots, n_k, \infty]$, la relation \prec est alors la restriction à \mathcal{S} de l'ordre lexicographique strict sur l'ensemble des mots sur l'alphabet $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$: c'est bien un ordre strict.

5.3. D'après la question 5.1, on a $\alpha \bowtie \check{\alpha}$ pour tout $\alpha \subset V$. Supposons que $\beta \rightarrow \alpha$. Il y a deux cas à étudier :

- si $\beta \triangleright \alpha$, on a nécessairement $\check{\beta} = \alpha$ ($\check{\beta}$ est l'unique γ tel que $\gamma \triangleright \beta$) et $\check{\check{\alpha}} = \beta$ (symétriquement). Comme α et β ne se distinguent qu'à la n -ème question, nous avons :

$$\begin{cases} \forall i \leq n-1, v_{\sigma_\alpha(i)} \in \alpha \iff v_{\sigma_\beta(i)} \in \beta \\ v_{\sigma_\alpha(n)} \notin \alpha \text{ et } v_{\sigma_\beta(n)} \in \beta \end{cases}$$

donc $\llbracket \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \circledast [n]$ où \circledast représente l'opération de concaténation : on a bien $\llbracket \check{\beta} \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \prec \llbracket \beta \rrbracket = \llbracket \check{\check{\alpha}} \rrbracket$.

- sinon, $\alpha \sqsubset \beta$ et $\alpha \not\triangleright \beta$. Il existe donc un indice i_0 tel que $v_{i_0} \in \beta$ et $\alpha = \beta \setminus \{v_{i_0}\}$. Si $v_{\sigma_\beta(n)} \in \beta$, $\check{\beta} = \beta \setminus \{v_{\sigma_\beta(n)}\} \neq \alpha$, donc $i_0 \neq \sigma_\beta(n)$. Sinon, i_0 est tout de même distinct de $\sigma_\beta(n)$, puisque $v_{i_0} \in \beta$. Dans tous les cas, il existe donc un entier $j_0 < n$ tel que $i_0 = \sigma_\beta(j_0)$. Les j_0 premières questions posées par $\text{REC}_K(\alpha)$ et $\text{REC}_K(\beta)$ seront donc identiques (les j_0-1 premières réponses également, mais les j_0 -èmes réponses seront différentes). D'autre part, pour tout γ , nous avons $\sigma_\gamma = \sigma_{\check{\gamma}}$ et

$$\begin{cases} \forall j < n, v_{\sigma_\gamma(j)} \in \gamma \iff v_{\sigma_{\check{\gamma}}(j)} \in \check{\gamma} \\ v_{\sigma_\gamma(n)} \in \gamma \iff v_{\sigma_{\check{\gamma}}(n)} \notin \check{\gamma} \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} \forall j < j_0, v_{\sigma_\alpha(j)} \in \check{\alpha} \iff v_{\sigma_\alpha(j)} \in \alpha \iff v_{\sigma_\beta(j)} \in \beta \iff v_{\sigma_{\check{\beta}}(j)} \in \check{\beta} \\ v_{\sigma_\alpha(j_0)} \notin \check{\alpha} \text{ car } v_{\sigma_\alpha(j_0)} = v_{i_0} \notin \alpha \\ v_{\sigma_{\check{\beta}}(j_0)} \in \check{\beta} \text{ car } v_{\sigma_{\check{\beta}}(j_0)} = v_{i_0} \in \beta \end{cases}$$

Il existe donc des listes L_1, L_2 et L_3 telles que :

$$\llbracket \check{\check{\alpha}} \rrbracket = L_1 \circledast L_2 \text{ et } \llbracket \check{\beta} \rrbracket = L_1 \circledast [j_0] \circledast L_3$$

avec L_2 vide ou ne contenant que des indices strictement plus grands que j_0 : nous avons une nouvelle fois $\llbracket \check{\beta} \rrbracket \prec \llbracket \check{\check{\alpha}} \rrbracket$.

Come il n'existe pas de cycle pour l'ordre strict \prec , il n'en existe pas non plus pour \rightarrow : la restriction de \triangleright à K est un champ de vecteur discret acyclique sur K .

5.4. Notons C_K l'ensemble des simplexes critiques de K et E_K l'ensemble des sous-ensembles évasifs. Si $\alpha \in C_K$, $\check{\alpha}$ n'est pas élément de K (c'est le seul $\beta \subset V$ tel que $\alpha \triangleright \beta$). Si $\check{\alpha}$ n'est pas vide, les parties α et $\check{\alpha}$ sont évasives. Nous pouvons donc distinguer deux cas :

- si $\check{\emptyset}$ est élément de K , alors les parties $\{\alpha, \check{\alpha}\}$, pour $\alpha \in C_K \setminus \{\check{\emptyset}\}$, sont deux à deux disjointes et contenues dans E_K , d'où

$$\text{Card}(E_K) \geq 2 \times (\text{Card}(C_K) - 1)$$

- sinon, les parties $\{\alpha, \check{\alpha}\}$, pour $\alpha \in C_K$, sont deux à deux disjointes et contenues dans E_K , d'où

$$\text{Card}(E_K) \geq 2 \times \text{Card}(C_K)$$

Comme $\text{Card}(C_K) = \sum_{p \in \mathbb{N}} c_p(K) \geq \sum_{p \in \mathbb{N}} \beta_p(K)$ (d'après 4.4), nous obtenons dans les deux cas :

$$\text{Card}(E_K) \geq 2 \times \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} \beta_p(K) - 1 \right)$$

Dès que $\sum_{p \in \mathbb{N}} \beta_p \geq 2$, tout reconnaisseur pour K aura au moins deux sous-ensembles évasifs : aucun reconnaisseur ne sera efficace. C'est le cas des simplexes de la figure 1, pour lesquels $\sum_{p \in \mathbb{N}} \beta_p = 1 + 1 = 2$.