Cenrale-Supélec 2016 [1]
Mathématiques 2

On se fixe un entier naturel n non nul. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on note $\deg P$ le degré de P et $\operatorname{cd} P$ son coefficient dominant lorsque P est non nul.

I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A L'opérateur de translation

On définit l'opérateur de translation sur les polynômes ainsi

$$\tau : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}.$$

I.A.1. Écrivons $P = \sum_0^d a_k X^k$ où $d \geqslant 0$ est le degré de P. Alors $\tau(P) = \sum_0^d a_k (X+1)^k = \sum_0^d a_k \sum_0^k \binom{k}{j} X^j = \sum_0^d (\sum_j^d a_k \binom{k}{j}) X^j = a_d X^d + \sum_{0 \leqslant j \leqslant k \leqslant d-1} a_k \binom{k}{j} X^j$ par la formule du binôme de Newton. Ainsi, $\tau(P)$ est de degré d et de coefficient dominant a_d.

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ non nul, } \deg \tau(P) = \deg P \text{ et } \operatorname{cd}(\tau(P)) = \operatorname{cd}(P).}$$

I.A.2. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $\tau^k(P) = P(X+k)$. Pour $k=0$ il n'y a rien à démontrer car $\tau^0 = \mathrm{id}_E$ par convention. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\tau^k(P) = P(X+k)$. Alors $\tau^{k+1}(P) = \tau(\tau^k(P)) = \tau(P(X+k))$ par hypothèse de récurrence. D'où $\tau^{k+1}(P) = P(X+1+k)$ ce qui conclut la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } k \in \mathbb{N},\ \tau^k(P) = P(X+k).}$$

I.A.3. Soit $j \in [\![1, n+1]\!]$. On a $\tau(P_j) = \tau(X^{j-1}) = (X+1)^{j-1} = \sum_0^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i = \sum_1^j \binom{j-1}{i-1} P_i$.

$$\boxed{\text{Les coefficients de } M \text{ sont donnés par } Mij = \binom{j-1}{i-1} \text{ avec la convention } \binom{j-1}{i-1} := 0 \text{ si } i > j.}$$

Cette définition est cohérente avec la définition des coefficients binomiaux : si $i > j$ il y a 0 façon de tirer i éléments parmi j.

I.A.4. La matrice M est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Elle admet donc une seule valeur propre : 1. Si M était diagonalisable, sa matrice dans une base de diagonalisation serait la matrice identité I_{n+1}. Mais alors M serait la matrice identité, ce qui n'est manifestement pas le cas.

$$\boxed{\operatorname{Sp}(M) = \{1\} \text{ et } M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

On retiendra de cette question que les seules matrices diagonalisables ayant une seule valeur propre sont les matrices scalaires.

I.A.5. En dimension finie, un endomorphisme f est bijectif si et seulement si il est injectif. Or $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ revient à dire que 0 n'est pas une valeur propre de f. Puisque $0 \notin \operatorname{Sp}(\tau)$ on en déduit que τ est injectif donc bijectif. On considère $\mu : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X-1) \end{array}$. Il est clair que $\tau \circ \mu = \mu \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Ainsi $\tau^{-1} = \mu$.

1. Vous pouvez envoyez vos remarques ainsi que les irréductibles erreurs et fautes de frappes qui se seront glissées dans ce document à l'adresse suivante pierre-amaury.monard@laposte.net. L'auteur vous en serait reconnaissant.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \tau \text{ est bijectif d'inverse } P \mapsto P(X-1)}$$

De plus, pour $j \in \mathbb{N}$, $\tau^j(P(X-j)) = P$ d'où $P(X-j) = \tau^{-j}(P)$.

$$\boxed{\text{La formule } \tau^j(P) = P(X+j) \text{ reste vraie pour } j \in \mathbb{Z}.}$$

I.A.6. Puisque τ est inversible, $M := mat_{(P_k)}\tau$ est une matrice inversible d'inverse $mat_{(P_k)}(\tau^{-1})$. Pour $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, on a $\tau^{-1}(P_j) = (X-1)^{j-1} = \sum_0^{j-1} \binom{j-1}{i}(-1)^{j-1-i}X^i = \sum_1^j \binom{j-1}{i-1}(-1)^{j-i}P_i$.

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est inversible et } M_{ij}^{-1} = (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} \text{ pour tout } i,j \in [\![1, n+1]\!].}$$

I.A.7. On reconnaît les coefficients de la matrice M dans la formule définissant la suite v. On pose $V = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. Soit $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Alors $V_{i,1} = v_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} u_j = \sum_1^i \binom{i-1}{j-1} u_{j+1} = \sum_1^{n+1} M_{ji}U_{j,1} = ({}^tMU)_{i,1}$.

$$\boxed{\text{La matrice } Q = {}^tM \text{ convient.}}$$

I.A.8. Puisque M est inversible, ${}^tM$ l'est aussi et de plus, $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$. En multipliant l'égalité $V = QU$ par $Q^{-1} = {}^t(M^{-1})$ on obtient ${}^t(M^{-1})V = U$ ce qui permet d'écrire les termes de la suite u en fonction de ceux de v. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On a $u_i = U_{i+1} = \sum_1^{n+1} M_{j,i+1}^{-1}V_{j,1} = \sum_0^n (-1)^{i-j}\binom{i}{j}v_i$ ce qui est bien la relation souhaitée car $\binom{i}{j} = 0$ si $j > i$. Ceci est vrai pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\ u_k = \sum_0^k (-1)^{k-j}\binom{k}{j}v_j.}$$

I.A.9. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $v_k = \sum_0^k \binom{k}{j}\lambda^j = (1+\lambda)^j$. Par ailleurs, $\sum_0^k(-1)^{k-j}(1+\lambda)^j = (-1+1+\lambda)^k = \lambda^k$ par la formule du binôme de Newton. On retrouve bien la suite initiale.

$$\boxed{\text{Si } u = (\lambda^k) \text{ alors } v = ((1+\lambda)^k).}$$

I.B L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\begin{array}{rccl} \delta : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}.$$

I.B.1. Soit $P = \sum_0^d a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré $d \in [\![1, n]\!]$. Alors $\delta(P) = \sum_0^d a_k \sum_0^k \binom{k}{j} X^j - \sum_0^d a_j X^j = \sum_0^d \left(\sum_j^d a_k \binom{k}{j} - a_j\right) X^j$. Le terme d'ordre d vaut $a_d\binom{d}{d} - a_d = 0$ et le terme d'ordre $d-1$ vaut $a_{d-1}\binom{d-1}{d-1} + a_d\binom{d}{d-1} - a_{d-1} = da_d$ qui est non nul. Le monôme dominant de $\delta(P)$ est da_dX^{d-1}.

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg P - 1 \text{ et } \mathrm{cd}(\delta(P)) = \deg P.\mathrm{cd}(P).}$$

I.B.2. Les polynômes constants sont clairement dans le noyaux de δ. Réciproquement, soit $P \in \operatorname{Ker}\delta$. Considérons le polynôme $Q = P - P(0)$. Alors $Q \in \operatorname{Ker}\delta$ *i.e* est 1-périodique, et comme $Q(0) = 0$

on a $0 = Q(1) = Q(2) = \dots$. Ainsi Q s'annule sur $\mathbb{N}$, a une infinité de racine et donc est le polynôme nul. Donc $P = P(0)$ est bien constant. Nous venons de montrer $\operatorname{Ker}\delta = \mathbb{R}_0[X]$.
Par ailleurs, nous avons montré à la question précédente que si P est de degré $d \leqslant n$ alors $\delta(P)$ est de degré au plus $d-1$. Ainsi $\delta(P)$ est de degré au plus $n-1$ *i.e* $\delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, nous pouvons calculer la dimension de $\operatorname{Im}\delta$ grâce au théorème du rang : $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{R}_0[X] + \operatorname{rg}\delta$ donc $\operatorname{rg}\delta = n$ et $\dim \operatorname{Im}\delta = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$. L'inclusion $\operatorname{Im}\delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ est donc une égalité puisqu'il y a égalité des dimensions.

$$\boxed{\operatorname{Ker}\delta = \mathbb{R}_0[X] \text{ et } \operatorname{Im}\delta = \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

I.B.3. Supposons que $\operatorname{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$ et $\operatorname{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$. Alors, un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est dans le noyau de δ^{j+1} si et seulement si $\delta(P)$ est dans le noyau de δ^j si et seulement si $\delta(P)$ est de degré au plus $j-1$. Donc $P \in \operatorname{Ker}(\delta^{j+1})$ si et seulement si P est de degrés au plus j d'où $\operatorname{Ker}(\delta^{j+1}) = \mathbb{R}_j[X]$.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\delta^j(P)$ est de degré au plus $n-j$ donc $\delta^{j+1}(P)$ est de degré au plus $n-j-1$. D'où $\operatorname{Im}(\delta^{j+1}) \subset \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$. De plus, le théorème du rang appliqué à δ^{j+1} montre que $\operatorname{rg}(\delta^{j+1}) = (n+1)-(j+1) = \dim \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$. L'inclusion est donc une égalité : $\operatorname{Im}(\delta^{j+1}) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.
On en déduit le résultat par récurrence sur $j \in [\![0,n]\!]$.

$$\boxed{\text{Pour tout } j \in [\![0,n]\!],\ \operatorname{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \text{ et } \operatorname{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X].}$$

I.B.4. On se place dans l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], +, \circ)$. Les éléments τ et $-\operatorname{id}$ commutent donc nous pouvons appliquer la formule du binôme de Newton (la chance) ce qui donne : $\delta^k = (\tau - \operatorname{id})^k = \sum_0^k \binom{k}{j} \tau^j \circ (-\operatorname{id})^{k-j}$. D'où, $\delta^k(P) = \sum_0^k \binom{k}{j}(-1)^{k-j}\tau^j(P)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et } P \in \mathbb{R}_n[X],\ \tau^k(P) = \sum_0^k \binom{k}{j}(-1)^{k-j}\tau^j(P).}$$

C'est une question classique qui présente un gros piège. Il ne faut surtout pas faire une récurrence. Cela reviendrait à redémontrer le binôme de Newton.

I.B.5. Prenons $k = n$ dans l'équation de la question I.B.4. : $\delta^n(P) = \sum_0^n \binom{n}{j}(-1)^{n-j}\tau^j(P)$. En se souvenant que $\operatorname{Ker}(\delta^n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\tau^j(P) = P(X+j)$ on a $0 = \sum_0^n \binom{n}{j}(-1)^{n-j}P(X+j)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On obtient l'équation souhaitée en évaluant en 0.

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \sum_0^n \binom{n}{j}(-1)^{n-j}P(j).}$$

I.B.6. **(a)** On a $u \circ \delta = u^3 = \delta \circ u$.

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } u \text{ et } \delta \text{ commutent.}}$$

On remarque que $\delta = P(u)$ avec $P = X^2$ donc δ est un polynôme en u. Or un endomorphisme et un polynôme en cet endomorphisme commutent toujours.

(b) Si deux endomorphisme commutent alors chacun stabilise les espaces propres de l'autre. Or, $\mathbb{R}_1[X] = E_0(\delta^2)$ où $E = \mathbb{R}_n[X]$. Traitons néanmoins la question. Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$ montrons $u(P) \in \mathbb{R}_1[X]$. On a $\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$ donc $u(P) \in \operatorname{Ker}\delta^2 = \mathbb{R}_1[X]$.

$$\boxed{\text{L'espace } \mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u.}$$

(c) Par l'absurde montrons qu'une telle matrice ne peut exister. Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$: $A \equiv \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sont les valeurs propres complexes de $\mathbb{C}$. Alors $\mathrm{Tr}(A^2) = \lambda^2 + \mu^2 = 0$. Par ailleurs, A est réelle donc λ et μ sont conjuguées. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda = a + ib$ et $\mu = a - ib$. Mais alors, $\lambda^2 + \mu^2 = (a^2 + 2iab + b^2) + (a^2 - 2iab + b^2) = 2(a^2 + b^2)$. Une somme de carrés de réels est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls. Donc $a = b = 0$ soit $\lambda = \mu = 0$. Donc A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ et donc $A^2 = 0$. ABSURDE.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

(d) Supposons par l'absurde qu'il tel u existe. Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u les restrictions de u et $\delta = u^2$ à $\mathbb{R}_1[X]$ sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_1[X]$. La famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$. La matrice de la restriction de δ dans la base $\mathcal{B}$ est précisément $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si on note A la matrice de la restriction de u dans la base $\mathcal{B}$ on a alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nous savons déjà que c'est absurde.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \delta \text{ n'est pas un carré.}}$$

I.B.7. **(a)** D'après la question I.B.1., $\delta^j(P)$ est de degré $d - j$. La famille $(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)$ est donc une famille de polynômes NON NULS échelonnée en degrés, donc libre.

$$\boxed{\text{La famille } (P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P) \text{ est libre.}}$$

De plus, c'est une famille de $d + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$ qui est de dimension $d + 1$; c'est donc une base de cet espace.

$$\boxed{\mathrm{Vect}(P, \ldots, \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X].}$$

Il ne faut surtout pas oublier l'hypothèse de non nullité des polynômes d'une famille échelonnée en degré. La famille $(0, 1, X)$ est échelonnée en degrés mais pas libre pour autant.

(b) Posons $\mathcal{N} := \{\deg P : \ P \in V \text{ non nul}\}$. C'est une partie de $\mathbb{N}$. Puisque $V \neq \{0\}$ elle est non vide. Puisque $V \subset \mathbb{R}_n[X]$ elle est bornée (par n). Elle admet donc un plus grand élément, disons $d \geqslant 0$. Soit $P \in V$ tel que $\deg P = d$. Alors V contient $P, \ldots, \delta^d P$ ainsi que l'espace vectoriel engendré par ces éléments : $\mathbb{R}_d[X] \subset V$. Si $V \neq \mathbb{R}_d[X]$, il existerait $Q \in V$ tel que $d < \deg Q$ ce qui contredirait la maximalité de d. Donc $V = \mathbb{R}_d[X]$.

Réciproquement, il est clair que les espaces $\mathbb{R}_d[X]$ sont stables par δ.

$$\boxed{\text{Un ss-ev } V \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ est stable par } \delta \text{ ssi } V = \mathbb{R}_d[X] \text{ pour un certain } d \in [\![0, n]\!].}$$

II Applications en combinatoire

Pour tout couple (p, k) d'entiers naturels non nuls, on note $S(p, k)$ le nombre de surjections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(p, 0) = 0$.

II.A Quelques cas particuliers

II.A.1. Si $p < n$, il n'existe aucune surjections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

$$\boxed{\text{Si } p < n \text{ alors } S(p,n) = 0.}$$

II.A.2. Une fonction de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est surjective si et seulement si elle est injective. Pour construire une injection f de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ on a n possibilités pour $f(1)$, $n-1$ possibilités pour $f(2)$,..., 1 possibilité pour $f(n)$. On a ainsi $n.(n-1)\dots 3.2.1$ injections possibles.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S(n,n) = n!.}$$

II.A.3. Le nombre de surjections de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est donnée par la formule

$$S(n+1,n) = n.\binom{n+1}{2}S(n-1,n-1).$$

Expliquons-la. Un (et un seul) des éléments de $[\![1,n]\!]$ est atteint par deux éléments de $[\![1,n+1]\!]$. Il y a n possibilités pour cet élément. Il y a $\binom{n+1}{2}$ choix possibles pour ses deux antécédents. Une fois ces deux éléments choisis et envoyés sur leur image, il reste encore à envoyer les $(n+1)-2 = n-1$ éléments restants de manière surjective sur les $n-1$ éléments restants de l'image. D'où la formule.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S(n+1,n) = \tfrac{n(n+1)!}{2}.}$$

II.B Recherche d'une expression générale

II.B.1. Des points cadeaux offerts par le sujet. On prend.

$$\boxed{\text{Il y a } n^p \text{ applications de } [\![1,p]\!] \text{ dans } [\![1,n]\!].}$$

II.B.2. Dénombrons le nombre de fonctions de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ de deux manières différentes. On sait déjà qu'il y en a n^p. une disjonction de cas sur la taille de l'image nous indique qu'il y en a

$$\sum_1^n \binom{n}{k} S(n,k).$$

Expliquons cette formule. Nous commençons par noter k le cardinal de l'image. Alors k est un entier naturel compris entre 1 et n (l'image ne peut être vide). Ensuite, il y a $\binom{n}{k}$ façons possibles de choisir les éléments de l'image parmi $\{1,\dots,n\}$. Enfin, une fois l'image déterminée, il y a $S(p,k)$ façons possibles d'envoyer p éléments sur k éléments de manière surjective d'où le terme $S(p,n)$. Il manque le terme $k=0$ dans la somme. Or $S(p,0) = 0$ donc on peut l'y ajouter sans modifier notre dénombrement.

$$\boxed{\text{Pour } p \geqslant n, \text{ on a } n^p = \sum_0^n \binom{n}{k} S(p,k).}$$

Une égalité entre entiers naturels peut (souvent) s'interpréter de manière combinatoire. On isole le terme le plus simple (ici n^p), on cherche un ensemble fini simple à dénombrer de cardinal cet entier (ici $\mathcal{F}([\![1,p]\!],[\![1,n]\!])$) et on dénombre cet ensemble d'une autre manière en faisant une disjonction de cas.

II.B.3. Utilisons la formule d'inversion binomiale établie à la question I.A.8.. Attention, ici p est constant, l'indice des suites est k.

$$\boxed{\text{Pour } p \geqslant n,\ S(p,n) = \sum_0^n (-1)^{n-k}\binom{n}{k} k^p.}$$

II.B.4. Pour $p < n$, on a vu que $S(p,n) = 0$. Par ailleurs la question I.B.5. appliquée au polynôme $P = X^p \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ montre que le terme de droite est aussi nul. Tout est cohérent.

$$\boxed{\text{L'équation établie à la question précédente reste vraie si } p < n.}$$

II.C

II.C.1. On reconnaît $S(n,n)$ à gauche et $S(n+1,n)$ à droite.

$$\boxed{\text{On a } \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n = n! \text{ et } \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+1} = \frac{n(n+1)!}{2}}$$

III Étude des polynômes de Hilbert

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X-j) \quad \text{pour } k \in [\![1,n]\!] \end{cases}.$$

III.A Généralités

III.A.1. Pour tout $k = 0,\dots,n$, H_k est de degré k. La famille $(H_0,\dots,H_n)$ est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré donc libre. De plus elle est de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$. C'est donc une base.

$$\boxed{\text{La famille } (H_0,\dots,H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

III.A.2. Le polynôme H_0 est constant donc $\delta(H_0) = 0$. Soit $k \in \{1,\dots,n\}$. Alors $k!\delta(H_k) = (\prod_0^{k-1}(X+1-j) - \prod_0^{k-1}(X-j)) = \prod_{-1}^{k-2}(X-i) - \prod_0^{k-1}(X-j) = \prod_0^{k-2}(X-j)\times[(X+1)-(X-(k-1))] = k\prod_0^{k-2}(X_j) = k.(k-1)!H_{k-1}$. D'où $\delta(H_k) = H_{k-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![0,n]\!],\ \delta(H_k) = H_{k-1} \text{ avec la convention } H_{-1} = 0.}$$

III.A.3. On a $\tau = \delta + \mathrm{id}$. On a $\tau(H_0) = \delta(H_0) + \mathrm{id}(H_0) = H_0$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\tau(H_k) = H_k + H_{k-1}$. La matrice de τ dans la base $(H_0,\dots H_n)$ est M'. Les matrices M et M' représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes ; elles sont donc semblables.

$$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ et } M' \text{ sont semblables.}}$$

III.A.4. On pose $H_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ de sorte que la relation $\delta(H_j) = H_{j-1}$ reste vraie si $j \leqslant 0$. On a donc $\delta^k(H_l) = H_{l-k}$. Si $l-k < 0$ alors $H_{l-k} = 0$ et $H_{l-k}(0) = 0$. Si $l-k > 0$ alors X divise H_{l-k} et $H_{l-k}(0) = 0$. Si $l-k = 0$ alors $H_{l-k} = 1$ et $H_{l-k}(0) = 1$.

$$\boxed{\text{Pour tous } l,k \in [\![0,n]\!],\ \delta^k(H_l)(0) = \delta_{l,k}.}$$

III.A.5. La famille $(H_0,\dots,H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc il existe des coefficients $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = a_0H_0 + \dots + a_nH_n$. Composons par δ^k et évaluons en 0 : $\delta^k(P)(0) = \sum_0^n a_l\delta^k(H_l)(0) = \sum_0^n a_l\delta_{l,k} = a_k$.

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n}(\delta^k(P))(0)H_k.}$$

III.B Étude d'un exemple

III.B.1. Notons $T := X^3+2X^2+5X+7$. Pour déterminer les coefficients $a_0, \ldots, a_3$ calculons $\delta^0(P), \ldots, \delta^3(P)$. On a

$$\begin{array}{rcl} \delta^0(T) & = & X^3+2X^2+5X+7 \\ \delta^1(T) & = & 3X^2+7X+8 \\ \delta^2(T) & = & 6X+10 \\ \delta^3(T) & = & 6. \end{array}$$

Évaluons en 0 :

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & 7 \\ a_1 & = & 8 \\ a_2 & = & 10 \\ a_3 & = & 6. \end{array}$$

$$\boxed{X^3+2X^2+5X+7 = 7H_0+8H_1+10H_2+6H_3.}$$

III.B.2. $\boxed{\text{Le polynôme } P = 7H_2+8H_3+10H_4+6H_5 \in \mathbb{R}_5[X] \text{ vérifie } \delta^2(P) = T.}$

III.B.3. Commençons par déterminer une solution particulière. Posons $p_k = P(k)$ où P est le polynôme de la question précédente. Alors, $p_{k+2} - 2p_{k+1} + p_k = P(k+2) - 2P(k+1) + P(k) = \delta^2(P)(k) = T(k) = k^3+2k^2+5k+7$. La suite $p = (p_k)_{k\geqslant 0}$ est donc bien une solution particulière du problème.

Soit u une autre solution du problème. Alors la suite $v := u - p$ vérifie $v_{k+2} - 2v_{k+1} + v_k = 0$. C'est donc une suite linéaire récurrente d'ordre 2. Le polynôme caractéristique associé à cette suite est $X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2$ qui a une racine double $r_1 = r_2 = 1$. Il existe donc des réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $v_k = (a+bk).1^k$. D'où $u_k = a + bk + p_k$. Réciproquement une telle suite est bien solution du problème de la question.

Enfin, remarquons que $H_l(k) = \frac{k(k-1)\ldots(k-h+1)}{h!} = \binom{k}{h}$ toujours avec la même convention si $h > k$.

$$\boxed{\text{La suite } u \text{ vérifie } u_{k+2} - 2u_{k+1} - u_k \text{ ssi } u_k = a + bk + 7\tbinom{k}{2} + 10\tbinom{k}{3} = 3\tbinom{k}{4} + 13\tbinom{k}{5} \text{ où } a, b \in \mathbb{R}.}$$

III.C Polynômes à valeurs entières

III.C.1. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $H_n(k) = \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!} = 0$. Pour $k \geqslant n$, $H_n(k) = \binom{k}{n}$. Pour $k \leqslant -1$ alors $H_n(k) = (-1)^n \frac{(-k)(n-1-k)\ldots(-k)}{n!} = (-1)^n\binom{n-1-k}{n}$.

$$\boxed{\text{Pour } k \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N},\ H_n(k) = \begin{cases} \binom{k}{n} & \text{si } k \geqslant 0, \\ (-1)^n\binom{n-1-k}{n} & \text{si } k \leqslant -1. \end{cases}}$$

III.C.2. Un coefficient binomial étant toujours entier :

$$\boxed{H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}.}$$

III.C.3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k) \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\delta(P)(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}.}$$

III.C.4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \sum_0^n a_k H_k$ où $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Alors $P(l) = \sum_0^n a_k H_k(l) \in \mathbb{Z}$. Donc $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Réciproquement si $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, par récurrence immédiate, $\delta^k(P)(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, en particulier $\delta^k(P)(0) \in \mathbb{Z}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or $P = \sum_0^n (\delta^k(P)(0)) H_k$ donc P a ses coefficients dans la base $(H_0, \dots, H_n)$ entiers.

$$\boxed{\text{Un polynôme } P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ vérifie } P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \text{ ssi ses coefficients dans la base } (H_0, \dots, H_n) \text{ sont entiers.}}$$

III.C.5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$ tel que P est à valeur entières sur les entiers. Il existe $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ tels que $P = a_0 H_0 + \cdots + a_d H_d$. Alors $d!P = \sum_0^d a_k d! H_k$. Pour $1 \leqslant k \leqslant d$, $d! H_k = d(d-1)\dots(k+1)X(X-1)\dots(X-k+1) \in \mathbb{Z}[X]$. Et $d! H_0 = d! \in \mathbb{Z}[X]$. Donc P est à coefficients entiers comme somme de polynômes à coefficients entiers.

$$\boxed{\text{Pour } P \in \mathbb{R}[X], \text{ si } P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \text{ alors } d!P \in \mathbb{Z}[X].}$$

La réciproque est fausse comme le montre le polynôme $P = X^2 + \frac{1}{2}$. On a $d = 2$ et $2!P = 2X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ mais $P(0) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$$

IV Généralisation de l'opérateur de différence et application

Pour une application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit l'application

$$\delta(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+1) - f(x) \end{array}.$$

IV.A

IV.A.1. La fonction $x \mapsto f(x+1)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc δf est de classe sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, δf est dérivable et $(\delta f)'(x) = f'(x+1) - f'(x) = \delta(f')(x)$ pour tout $x > 0$.

$$\boxed{\delta f \in \mathcal{C}^\infty \text{ et } (\delta f)' = \delta(f').}$$

Posons $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et définissons $D : E \to E$ par $D(f) := f'$. Alors $D, \delta \in \mathcal{L}(E)$ et $D \circ \delta = \delta \circ D$.

IV.A.2. Posons

$$\tau(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+1). \end{array}$$

Alors $\tau \in \mathcal{L}(E)$ et $\delta = \tau - \mathrm{id}_E$.

Dans l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ les éléments τ et id_E commutent. Nous pouvons donc appliquer la formule du binôme de Newton : $\delta^n = \sum_0^n \binom{n}{j} \tau^j \circ (-\mathrm{id}_E)^{n-j}$ d'où $\delta^n(f)(x) = \sum_0^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(x+j)$.

$$\boxed{\text{Pour } x > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N},\ \delta^n(f)(x) = \sum_0^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(x+j).}$$

IV.A.3. Soit $x > 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, x+1]$ donc d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $z_1 \in (x, x+1)$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(z_1)(x+1-x)$ soit $(\delta f)(x) = f'(z)$. Posons $y_1 := z_1 - x \in (0, 1)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0, \text{ il existe } y_1 \in (0,1) \text{ tel que } (\delta f)(x) = f'(x + y_1).}$$

On devrait noter $y_1 = y_1(x)$ pour souligner que y_1 dépend de x voire même $y_1 = y_1(x, f)$.

IV.A.4. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $f \in E$ et tout $x > 0$ il existe $y_n \in (0, n)$ tel que $\delta^n f(x) = f^{(n)}(x + y_n)$. L'initialisation à $n = 1$ a été traitée à la question précédente. Supposons la propriété vraie au rang $n - 1 \in \mathbb{N}^*$. Soit $x > 0$. Appliquons l'hypothèse de récurrence à la fonction δf au point x : $\delta^{n-1}(\delta f)(x) = (\delta f)^{(n-1)}(x + y_{n-1})$ pour un certain $y_{n-1} \in (0, n-1)$. Or D et δ commutent d'après la question IV.A.1. donc $(\delta f)^{(n-1)}(x + y_{n-1}) = \delta(f^{(n-1)})(x + y_{n-1}) = (f^{(n-1)})'(x + y_{n-1} + \epsilon_1)$ pour un certain $\epsilon_1 \in (0, 1)$ d'après l'initialisation. Posons $y_n := y_{n-1} + \epsilon_1 \in (0, n)$. D'où $\delta^n f(x) = f^{(n)}(x + y_n)$ ce qui conclut la récurrence. D'après l'expression de $(\delta^n f)(x)$ trouvée à la question IV.A.2. :

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } y_n \in (0, n) \text{ tel que } \sum_0^n (-1)^{n-j}\binom{n}{j} f(x + j) = f^{(n)}(x + y_n).}$$

IV.B

On considère dans toute la suite de cette partie un réel α. On suppose que pour tout nombre p premier, p^α est un entier naturel. On se propose de montrer que α est alors un entier naturel.

IV.B.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de décomposition en facteur premier, il existe $s \geqslant 0$ un entier et $p_1, \ldots, p_s$ des nombres premiers (non nécessairement distincts) tels que $k = p_1 \ldots p_s$. Alors $k^\alpha = p_1^\alpha \ldots p_s^\alpha$ est un entier naturel comme produit d'entiers naturels. De plus, $k^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln k}$ par définition donc k^α est non nul.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k > 0, \ k^\alpha \in \mathbb{N}^*.}$$

IV.B.2. Si $\alpha < 0$ alors $\alpha \ln 2 < 0$ d'où $0 < \mathrm{e}^{\alpha \ln 2} = 2^\alpha < 1$ ce qui contredit $2^\alpha \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\alpha \geqslant 0.}$$

IV.B.3. Pour tout $\alpha \geqslant 0$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ est de bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors f_α est un monôme de degré α et $f_\alpha^{(\alpha+1)}$ est la fonction identiquement nulle. En particulier elle s'annule en 1.

Réciproquement, s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ tels que $f_\alpha^{(k)}(x) = 0$ alors $\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k} = 0$. Comme $x > 0$, $x^\alpha \neq 0$ et donc $\alpha \ldots (\alpha - k + 1) = 0$ et il existe $j \in [\![0, k-1]\!]$ tel que $\alpha - j = 0$ *i.e* $\alpha = j$ et $\alpha \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{Il existe } k \in \mathbb{N} \text{ et } x > 0 \text{ tel que } f_\alpha^{(k)}(x) = 0 \text{ si et seulement si } \alpha \in \mathbb{N}.}$$

IV.C

On applique la relation trouvée à la question IV.A.4. à la fonction f_α et à l'entier $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$. On choisit désormais $x \in \mathbb{N}^*$.

IV.C.1. D'après la question IV.B.1., $f_\alpha(x + j) = (x + j)^\alpha$ est un entier car $x + j \in \mathbb{N}^*$. Les coefficients binomiaux étant eux aussi des entiers, on en déduit

$$\boxed{\text{L'expression } \sum_0^n (-1)^{n-j}\binom{n}{j} f_\alpha(x + j) \text{ est entière.}}$$

IV.C.2. Ici, l'entier n est fixé et c'est l'entier x qui varie. On ne peut pas faire tendre x vers $+\infty$ immédiatement dans l'expression $f_\alpha^{(n)}(x+y_n)$ car y_n dépend de x ! Comme $n > \alpha$ et $1 \leqslant x \leqslant x+y_n$ on a $(\alpha - n)\ln x \geqslant (\alpha - n)\ln(x + y_n)$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$. Posons $C_{\alpha,n} := \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$ de sorte que $f_\alpha^{(n)}(x) = C_{\alpha,n}x^{\alpha-n}$. D'où, $|f_\alpha^{(n)}(x)| \leqslant |C_{\alpha,n}|\mathrm{e}^{(\alpha-n)\ln x} \to 0^+$ quand x tend vers $+\infty$ car $\alpha - n < 0$.

$$\boxed{\text{Pour } n := \lfloor x \rfloor + 1,\ f_\alpha^{(n)}(x+y_n) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty.}$$

IV.C.3. D'après les deux questions précédentes, la suite $(u_x = f_\alpha^{(n)}(x+y_n))_{x\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'entiers relatifs qui converge vers 0 ; c'est donc une suite stationnaire de constante de stationnarité égale à 0. En particulier, il existe $x \in \mathbb{N}^*$ assez grand et $y_n > 0$ tel que $f_\alpha^{(n)}(x+y_n) = 0$. D'après la question IV.B.3. le réel α est un entier.

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{N}.}$$

$* * *$ FIN $* * *$