ENS 2003 - Math PC

Titre : *Problème de minimisation.*

Le problème concerne la minimisation de l'intégrale

$$\int_I E(\rho(x), \rho'(x))\, dx$$

pour $\rho \in \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est un certain sous-ensemble de $\mathcal{C}^1(I)$; E étant un élément de $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et tout entier naturel k, on note $\mathcal{C}^k(I) = \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et à valeurs réelles. $\mathcal{C}^0(I)$ est noté $\mathcal{C}(I)$. Si $I = [a, b]$, on note $\mathcal{C}_0(I)$ l'espace des fonctions continues sur I s'annulant en a et b, et $\mathcal{C}_0^k(I)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, nulles en a et b ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k. De façon analogue, $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ admettant des limites nulles en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k.

I Résultats préliminaires

1 Un lemme fondamental

i) Soit $\mathcal{B} = \{h \in \mathcal{C}^1([a, b]); h(a) = h(b) = 0\}$ où $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$ telle que ,

$$\forall h \in \mathcal{B}, \quad \int_a^b f(x)h'(x)\, dx = 0.$$

La fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_a^x (f(t) - c)\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et vérifie $h(a) = 0$.
Le calcul donne $h(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt - c(b-a)$. Il suffit donc de choisir $c = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ pour obtenir $h \in \mathcal{B}$.
On a

$$\int_a^b f(x)h'(x)\, dx = \int_a^b f(x)^2\, dx - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à f et 1 donne

$$\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2\, dx \int_a^b 1\, dx$$

avec égalité si et seulement f et 1 sont colinéaires.
Il en résulte que la fonction f cherchée est constante.
Inversement, il est clair que pour toute fonction f constante, on a

$$\forall h \in \mathcal{B}, \quad \int_a^b f(x)h'(x)\, dx = 0.$$

Remarque(Claude Morin) : on peut éviter Cauchy-Schwarz en écrivant :

$$\int_a^b f(x) * h'(x)\, dx = \int_a^b (f(x) - c)^2\, dx + \underbrace{\int_a^b c * h'(x)\, dx}_{0}$$

d'où $\displaystyle\int_a^b (f(x) - c)^2\, dx = 0$ et $f = c$.

ii) Soient $(f,g) \in \mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b])$ tels que, pour tout $h \in \mathcal{B}$,

$$\int_a^b (f(x)h(x) + g(x)h'(x))\,dx = 0.$$

Posons $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Une intégration par parties donne

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = \underbrace{[F(x)h(x)]_a^b}_{0} - \int_a^b F(x)h'(x)\,dx.$$

Ainsi

$$\forall h \in \mathcal{B}, \quad \int_a^b (g(x) - F(x))h'(x)\,dx = 0$$

Il résulte de **i)**, que $g - F$ est constante, c'est-à-dire g est une primitive de f sur $[a,b]$.

La fonction $g : x \mapsto |x - (a+b)/2|$ n'est pas dérivable en $(a+b)/2$, elle ne peut donc pas être primitive sur $[a,b]$ d'une fonction continue.

2 Mesure des courbes et surfaces

i) Un arc de courbe défini par une équation cartésienne ,

$$\Gamma = \{(x, \varphi(x)); x \in [a,b]\},$$

avec $a < b$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ a pour longueur $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\,dx$.

ii) Soient $\alpha \in]0, 2\pi[$ et $R > r > 0$.L'aire de

$$S = \{(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega); r < \rho < R \text{ et } 0 \leq \omega \leq \alpha\}$$

se calcule aisément à l'aide d'un passage en polaire,

$$\int\int_S 1\,dxdy = \int_0^\alpha \left(\int_r^R \rho d\rho\right) d\omega = \frac{\alpha(R^2 - r^2)}{2}.$$

iii) La surface de révolution Σ obtenue par rotation de l'arc de Γ (ne coupant pas l'axe Ox) autour de Ox a une aire égale à

$$A = 2\pi \int_a^b \varphi(x)\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\,dx.$$

Si Γ est un segment de droite parallèle à Ox, alors $\varphi(x) = d > 0$ et Σ est un cylindre à base circulaire. La surface développée de Σ est une rectangle de cotés $b - a$ et $2\pi d$ et d'aire $2\pi(b-a)d$, qui est bien le résultat donné par la formule ci-dessus.

Si Γ est un segment de droite non parallèle à Ox, alors à translation près, on peut choisir $\varphi(x) = \tan\theta x$ avec $\theta \in]0, \pi/2[$ et $0 \leq a < b$. A l'aide d'un dessin, on constate que la surface développée de Σ est un secteur angulaire analogue à S avec

$$r = \frac{a}{\cos\theta}, \quad R = \frac{b}{\cos\theta}, \quad \text{et } r\alpha = 2\pi\varphi(a)$$

ainsi $\alpha = 2\pi\sin\theta$.
Le calcul de l'aire , à l'aide de ii), donne

$$\frac{\alpha(R^2 - r^2)}{2} = \frac{(R\alpha + r\alpha)(R - r)}{2} = \pi(\varphi(b) + \varphi(a))\frac{b - a}{\cos\theta} = \pi\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}(b^2 - a^2),$$

qui est bien le résultat donné par la formule ci-dessus.

3 Méthode de séparation des variables

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que $G \in \mathcal{C}^1(J)$ ne s'annule pas.
Soient $a \in I$, $\alpha \in J$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(I, J)$ telle que $\rho(a) = \alpha$ et $\rho'(x) = G(\rho(x))$ pour tout $x \in I$.
On a donc ρ strictement monotone sur I et le changement de variable $r = \rho(x)$ donne

$$\int_\alpha^{\rho(x)} \frac{dr}{G(r)} = \int_a^x \frac{\rho'(x)}{G(\rho(x))}\, dx = x - a.$$

II Minimisation sur un intervalle I borné

A toute fonction $\rho \in \mathcal{C}^1([a, b])$ on associe le nombre réel

$$\mathcal{E}[\rho] = \int_a^b E(\rho(x), \rho'(x))\, dx$$

1

Soient ρ et $h \in \mathcal{C}^1([a, b])$. On considère la fonction

$$e_{\rho,h} : t \mapsto \mathcal{E}[\rho + th] = \int_a^b H(t, x)\, dx \quad \text{où } H = E \circ \Psi$$

avec $\Psi : (t, x) \in \mathbb{R} \times [a, b] \mapsto (\rho(x) + th(x), \rho'(x) + th'(x)) \in \mathbb{R}^2$

H étant clairement continue sur $\mathbb{R} \times [a, b]$. d'après le théorème sur la continuité d'une intégrale à paramètre, $e_{\rho,h}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Ψ admet des dérivées partielles par rapport à t continues sur $\mathbb{R} \times [a, b]$ et E est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}^2$, ainsi H admet des dérivées partielles par rapport à t continues sur $\mathbb{R} \times [a, b]$. le calcul de la dérivation composée donne

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial E}{\partial q}(\Psi(t, x))h(x) + \frac{\partial E}{\partial p}(\Psi(t, x))h'(x).$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 E}{\partial q^2}(\Psi(t, x))h(x)^2 + 2\frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(\Psi(t, x))h(x)h'(x) + \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}(\Psi(t, x))h'(x)^2.$$

D'après le théorème sur la dérivation d'une intégrale à paramètre, $e_{\rho,h}$ est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{\mathrm{d}e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t}(t) = \int_a^b \frac{\partial H}{\partial t}(t, x)\, dx \quad \frac{\mathrm{d}^2 e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \int_a^b \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(t, x)\, dx.$$

Ainsi

$$\frac{\mathrm{d}e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t}(0) = \int_a^b \frac{\partial E}{\partial q}(\rho(x), \rho'(x))h(x) + \frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x))h'(x)\, dx.$$

et

$$\frac{\mathrm{d}^2 e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t^2}(0) = \int_a^b \frac{\partial^2 E}{\partial q^2}(\rho(x), \rho'(x))h(x)^2 + 2\frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(\rho(x), \rho'(x))h(x)h'(x) + \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}(\rho(x), \rho'(x))h'(x)^2\, dx.$$

2

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\rho \in \mathcal{A}$ réalisant le minimum :

$$\mathcal{E}[\rho] = \min_{\eta \in \mathcal{A}} \mathcal{E}[\eta], \quad \text{où } \mathcal{A} = \{\eta \in \mathcal{C}^1([a, b]); \eta(a) = \alpha, \eta(b) = \beta\}. \tag{1}$$

i) Soit $h \in \mathcal{B}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\rho + th \in \mathcal{A}$, ainsi la fonction $e_{\rho,h}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, présente un minimum en 0 donc

$$\frac{\mathrm{d}e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t}(0) = 0.$$

ii) Il résulte de **I. 1. ii)** appliqué à $\frac{de_{\rho,h}}{dt}(0) = 0$, que la fonction $x \mapsto \frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x))$ est une primitive, sur $[a,b]$, de $x \mapsto \frac{\partial E}{\partial q}(\rho(x), \rho'(x))$.

Par composition, la fonction $x \mapsto \frac{\partial E}{\partial q}(\rho(x), \rho'(x))$ esr continue sur $[a,b]$, ainsi la fonction

$$x \in [a,b] \mapsto \frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x))$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x))\right) = \frac{\partial E}{\partial q}(\rho(x), \rho'(x)) \tag{2}$$

pour tout $x \in [a,b]$.

iii) Soit ρ une extrémale de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire $\rho \in \mathcal{A}$, au moins de classe $\mathcal{C}^2$ et satisfaisant l'équation (2) sur $[a,b]$.

La fonction $x \mapsto E(\rho(x), \rho'(x)) - \rho'(x)\frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
Le calcul de sa dérivée, avec (2), donne 0. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{d}{dx}\left(E(\rho(x), \rho'(x)) - \rho'(x)\frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x))\right) dx \\
&= E(\rho(b), \rho'(b)) - \rho'(b)\frac{\partial E}{\partial p}(\rho(b), \rho'(b)) - E(\rho(a), \rho'(a)) + \rho'(a)\frac{\partial E}{\partial p}(\rho(a), \rho'(a)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

3

On suppose que ρ, vérifie (1) en étant de classe $\mathcal{C}^2$.

i) Soit $h \in \mathcal{B}$. On a indiqué en **II. 2. i)** que la fonction $e_{\rho,h}$ présentait un minimum en 0. Comme elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on a donc

$$\frac{\mathrm{d}^2 e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t^2}(0) \geq 0.$$

ii) Une intégration par parties donne

$$\int_a^b 2\frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(\rho(x), \rho'(x))h(x)h'(x)\,dx = \underbrace{\left[h^2(x)\frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(\rho(x), \rho'(x))\right]_a^b}_{0} - \int_a^b h^2(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(\rho(x), \rho'(x))\right) dx.$$

En reportant dans l'expression de $\frac{d^2 e_{\rho,h}}{dt^2}(0)$, on obtient, pour tout $h \in \mathcal{C}^1([a,b]) \bigcap \mathcal{C}_0([a,b])$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t^2}(0) = \int_a^b \left(P(x)h'(x)^2 + Q(x)h(x)^2\right) dx \geq 0, \tag{3}$$

avec

$$P(x) = \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}(\rho(x), \rho'(x)), \quad Q(x) = \frac{\partial^2 E}{\partial q^2}(\rho(x), \rho'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(\rho(x), \rho'(x))\right). \tag{4}$$

E étant de classe $\mathcal{C}^3$ et ρ de classe $\mathcal{C}^2$, on obtient P de classe $\mathcal{C}^1$ et Q de classe $\mathcal{C}^0$.

4 Exemples

i) Dans cette question, on considère $E(q,p) = \sqrt{1+p^2}$.
D'après **I.2.i)**, le problème de minimisation de $\mathcal{E}$ consiste à trouver les arcs de courbe Γ de longueur minimale, reliant les points (a, α) et (b, β). Le calcul donne

$$\frac{\partial E}{\partial q}(q,p) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial p}(q,p) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Ainsi les fonctions ρ satisfont l'équation (2) si et seulement si

$$\frac{\rho'(x)}{\sqrt{1+\rho'(x)^2}} = c \quad \text{où } c \text{ est une constante telle que } |c| < 1.$$

Il en résulte que $\rho'(x)^2$ est une constante. La continuité de ρ' sur $[a, b]$ entraîne ρ' constante.
Ainsi ρ est affine sur $[a, b]$. L'unique fonction appartenant à l'ensemble $\mathcal{A}$ est donnée par l'interpolation (de Lagrange) $\rho(a) = \alpha$ et $\rho(b) = \beta$. On obtient

$$\rho(x) = \alpha\frac{x-b}{a-b} + \beta\frac{x-a}{b-a}.$$

Le calcul donne

$$\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}(q,p) = \frac{1}{(1+p^2)^{3/2}}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(q,p) = \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}(q,p) = 0$$

d'où les fonctions P, Q définies par (4)

$$P(x) = \frac{1}{(1+\rho'(x)^2)^{3/2}}, \quad Q(x) = 0.$$

ρ étant de classe $\mathcal{C}^2$, il en résulte, d'après **3** ci-dessus, que l'inégalité (3) est satisfaite.

ii) Dans cette question, on considère $E(q,p) = q\sqrt{1+p^2}$.
D'après **I.2.iii)**, le problème de minimisation de $\mathcal{E}$ consiste à trouver les arcs de courbe Γ reliant les points (a, α) et (b, β), sans couper l'axe Ox, tels que les surfaces de révolution Σ obtenue par rotation de Γ autour de Ox soient d'aire minimale.
Le calcul donne

$$\frac{\partial E}{\partial q}(q,p) = \sqrt{1+p^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial p}(q,p) = \frac{pq}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Ainsi les fonctions ρ satisfont l'équation (2) si et seulement si

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\rho(x)\rho'(x)}{\sqrt{1+\rho'(x)^2}}\right) = \sqrt{1+\rho'(x)^2}.$$

Le calcul donne $\rho(x)\rho''(x) = 1 + \rho'(x)^2$.

Considérons la fonction $u = \dfrac{\rho(x)^2}{1+\rho'(x)^2}$.
Le calcul de sa dérivée donne $u'(x) = 0$ ainsi u est une fonction constante égale à C^2 avec $C > 0$ (car $\rho(x)$ ne s'annule pas).
On en déduit la relation

$$\rho'(x)^2 = \frac{\rho(x)^2 - C^2}{C^2}. \tag{5}$$

On suppose $C < \alpha < \beta$. On recherche $\rho \in \mathcal{A}$, strictement croissante et satisfaisant (5) sur $[a, b]$, donc

$$\rho'(x) = \frac{\sqrt{\rho(x)^2 - C^2}}{C}.$$

La méthode de séparation de variables de la question **I.3**, avec $G(r) = \dfrac{\sqrt{r^2 - C^2}}{C}$, donne

$$\int_{\alpha}^{\rho(x)} \frac{C}{\sqrt{r^2 - C^2}}\, dr = x - a.$$

Nota : le calcul de la primitive donne $\rho(x) = C\mathrm{ch}\dfrac{x - c_1}{C}$ avec c_1 imposé par $\rho(a) = \alpha$.
La surface minimale obtenue, porte le nom de catenoïde dans la littérature.

5 Etude de $\mathcal{Q}[h]$

On cherche des conditions sur les fonctions P et Q assurant l'inégalité (3), c'est-à-dire,

$$\mathcal{Q}[h] \geq 0 \quad \text{quel que soit } h \in \mathcal{C}^1([a, b]) \bigcap \mathcal{C}_0([a, b]), \tag{6}$$

en notant $\mathcal{Q}[h] = \displaystyle\int_a^b \Big(P(x)h'(x)^2 + Q(x)h(x)^2\Big)\, dx$.

i) On se propose de montrer que (6) implique

$$P(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in [a, b]. \tag{7}$$

On s'intéresse à des fonctions à "grosses dérivées". Pour $\varepsilon > 0$, on considère la fonction paire $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^1([-\varepsilon, \varepsilon])$ définie par

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 \frac{\pi x}{2\varepsilon}.$$

On a $g'_\varepsilon(x) = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}\varepsilon} \sin \dfrac{\pi x}{\varepsilon}$, ainsi $g_\varepsilon(\pm\varepsilon) = g'_\varepsilon(\pm\varepsilon) = 0$ donc $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^1([-\varepsilon, \varepsilon])$.

On a

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(x)^2\, dx \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2}\, dx \leq \varepsilon$$

et

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g'_\varepsilon(x)^2\, dx = \frac{\pi^2}{8\varepsilon^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sin^2 \frac{\pi x}{\varepsilon}\, dx = \frac{\pi^2}{16\varepsilon^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 1 - \cos \frac{2\pi x}{\varepsilon}\, dx = \frac{\pi^2}{8\varepsilon}$$

d'où l'inégalité demandée, en posant $C = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Supposons qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $P(x_0) < 0$ ($P(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, entraînant par continuité, $P(a) \geq 0$ et $P(b) \geq 0$).

On considère ε suffisamment petit, afin que

$$a \leq x_0 - \varepsilon, \quad x_0 + \varepsilon \leq b, \quad \text{et} \quad \frac{3}{2}P(x_0) \leq P(x) \leq \frac{1}{2}P(x_0) \text{ pour tout } x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

La fonction h_ε définie sur $[a, b]$ par

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} g_\varepsilon(x - x_0) & \text{si } x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est un élément de $\mathcal{B} = \mathcal{C}^1([a, b]) \bigcap \mathcal{C}_0([a, b])$.

Le calcul donne
$$\mathcal{Q}[h_\varepsilon] = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \Big(P(x)h_\varepsilon'(x)^2 + Q(x)h_\varepsilon(x)^2\Big)\,dx.$$
On a
$$\left|\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} Q(x)h_\varepsilon(x)^2\,dx\right| \leq \varepsilon\|Q\|_\infty \quad \text{où } \|Q\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|Q(x)|$$
et
$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} P(x)h_\varepsilon'(x)^2\,dx \leq -\frac{|P(x_0)|}{2}\frac{C}{\varepsilon}.$$
On peut choisir ε suffisamment petit pour obtenir $\dfrac{|P(x_0)|}{2}\dfrac{C}{\varepsilon} > \varepsilon\|Q\|_\infty$, ce qui donne $\mathcal{Q}[h_\varepsilon] < 0$ et contredit (6).
La propriété (7) est donc établie.

ii) On suppose qu'il existe une fonction $w \in \mathcal{C}^1([a,b])$ satisfaisant
$$P(x)(Q(x) + w'(x)) = w(x)^2 \tag{8}$$
pour tout $x \in [a,b]$.
La forme quadratique (en $h'(x)$ et $h(x)$) suivante
$$fq(x) = P(x)h'(x)^2 + 2w(x)h'(x)h(x) + (Q(x) + w'(x))h(x)^2$$
a pour discriminant $w(x)^2 - P(x)(Q(x) + w'(x)) = 0$ et le coefficient de $h'(x)^2$ est $P(x) \geq 0$, ainsi $fq(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Par ailleurs
$$0 \leq \int_a^b fq(x)\,dx = \mathcal{Q}[h] + \int_a^b 2w(x)h'(x)h(x) + w'(x)h(x)^2\,dx = \mathcal{Q}[h] + \underbrace{\Big[w(x)h(x)^2\Big]_a^b}_{0}$$
d'où la propriété (6).

iii) **Etude de l'équation (8)**
On suppose ici que $P(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Soit $w \in \mathcal{C}^1([a,b])$ une solution de (8) et u une solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre
$$Pu' + wu = 0$$
On sait que si $u \neq 0$, alors u ne s'annule en aucune valeur de $[a,b]$.

On suppose qu'il existe une solution $u \neq 0$ de classe $\mathcal{C}^2$. Un calcul de dérivée donne $(Pu')' = (-wu)' = -w'u - wu' = u(-w' + \frac{w^2}{P})$. Il résulte de (8) que
$$(Pu')' = uQ.$$
On suppose qu'il existe une solution v est de classe $\mathcal{C}^2$, de l'équation différentielle linéaire du second ordre
$$-(Pv')' + Qv = 0 \tag{9}$$
ne s'annulant pas sur $[a,b]$.
On définit $w = \dfrac{-Pv'}{v}$. Comme P est de classe $\mathcal{C}^1$ (**II.3.ii)**), il en résulte que $w \in \mathcal{C}^1([a,b])$.
En dérivant la relation $Pv' + wv = 0$, on obtient
$$(Pv')' + w'v + wv' = (Q + w')v + wv' = 0$$
Il en résulte que
$$P((Q + w') = P\frac{-1}{v}wv' = w^2$$
Ainsi w vérifie (8) pour tout $x \in [a,b]$.

III Minimisation sur un intervalle I infini

Dans toute cette partie, on considère

$$E(q,p) = F(q) + \frac{1}{2}K(q)p^2, \tag{10}$$

où les fonctions F et $K \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ vérifient

$$K(q) \geq K_0 > 0, \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

$$\begin{cases} F(q) > 0, \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha,\beta\}, \\ F(\alpha) = F(\beta) = 0,\ \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q}(\alpha) = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q}(\beta) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}q^2}(\alpha) > 0 \text{ et } \dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}q^2}(\beta) > 0 \end{cases} \tag{12}$$

On suppose pour fixer les idées $\alpha < \beta$.

1 Préambule

i) Si une fonction polynomiale F_P satisfait (12), elle correspond à un polynôme admettant α et β pour racines d'ordre 2 (et pas davantage). En imposant un degré égal à 4 et un coefficient dominant égal à 1, on obtient une seule fonction possible

$$F_P(q) = (q-\alpha)^2(q-\beta)^2.$$

On constate que $F_P(q) > 0$ pour tout $q \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha,\beta\}$. Par ailleurs, $F_P(q)$ présente un minimum en α et β donc $\dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}q^2}(\alpha) > 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}q^2}(\beta) > 0$. F_P convient donc.

ii) Pour $\theta > 0$, on note $\mathcal{A}^k_\theta(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\rho \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} \rho(x) - \alpha = \mathcal{O}(e^{\theta x}) & \text{et, pour tout } m \leq k, \quad \rho^{(m)}(x) = \mathcal{O}(e^{\theta x}) & \text{lorsque } x \to -\infty, \\ \rho(x) - \beta = \mathcal{O}(e^{-\theta x}) & \text{et, pour tout } m \leq k, \quad \rho^{(m)}(x) = \mathcal{O}(e^{-\theta x}) & \text{lorsque } x \to +\infty. \end{cases} \tag{13}$$

Soit $\rho \in \mathcal{A}^1_\theta(\mathbb{R})$. On a $E(\rho(x),\rho'(x)) = F(\rho(x)) + \frac{1}{2}K(\rho(x))\rho'(x)^2$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x) = \beta$, on obtient, par continuité de F et K en β,

$$\lim_{x\to+\infty} F(\rho(x)) = F(\beta) = 0 \quad \text{et} \lim_{x\to+\infty} K(\rho(x)) = K(\beta).$$

On a $\rho'(x) \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-\theta x})$. Ainsi $\dfrac{1}{2}K(\rho(x))\rho'(x)^2 \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-2\theta x})$.
Par ailleurs, une formule de Taylor avec reste intégrale, appliquée à F entre β et $\rho(x)$, donne

$$F(\rho(x)) = F(\beta) + (\rho(x)-\beta)F'(\beta) + \int_\beta^{\rho(x)} (\rho(x)-q)F''(q)\,dq = \int_\beta^{\rho(x)} (\rho(x)-q)F''(q)\,dq$$

Ainsi $|F(\rho(x))| \leq \dfrac{1}{2}\|F''\|_\infty(\rho(x)-\beta)^2$ où $\|F''\|_\infty$ est le sup de $|F''(q)|$ dans un voisinage de β. Il en résulte, en groupant les deux majorations, que $F(\rho(x)) \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-2\theta x})$.
Il en résulte que la fonction $x \mapsto E(\rho(x),\rho'(x))$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
L'intégrabilité sur $\mathbb{R}^-$ s'établit de manière identique.
On peut donc définir

$$\mathcal{E}[\rho] = \int_{-\infty}^{\infty} E(\rho(x),\rho'(x))\,dx;$$

Comme la condition nécessaire (2) établie en **II.2.ii)** reste valable pour I quelconque, sous-entendue l'existence de $\mathcal{E}[\rho]$, on appelle extrémale de $\mathcal{E}$ une fonction $\rho \in \mathcal{A}^2_\theta(\mathbb{R})$ pour au moins un nombre $\theta > 0$ et satisfaisant (2) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

iii) Le calcul donne

$$\frac{\partial E}{\partial q}(q,p) = F'(q) + \frac{1}{2}K'(q)p^2, \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial p}(q,p) = K(q)p.$$

Ainsi une fonction ρ satisfait l'équation (2) si et seulement si

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(K(\rho(x))\rho'(x)\right) = F'(\rho(x)) + \frac{1}{2}K'(\rho(x))\rho'(x)^2.$$

Une intégration par parties de $F'(\rho(x))\rho'(x) = \rho'(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(K(\rho(x))\rho'(x)\right) - \frac{1}{2}K'(\rho(x)q)\rho'(x)^3$ donne

$$\int_{x_0}^{x} F'(\rho(t))\rho'(t)\,dt = \Big[K(\rho(t))\rho'(t)^2\Big]_{x_0}^{x} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_{x_0}^{x} 2K(\rho(t))\rho'(t)\rho''(t) + K'(\rho(t))\rho'(t)^3\,dt}_{[K(\rho(t))\rho'(t)^2]_{x_0}^{x}}.$$

On en déduit

$$F(\rho(x)) - F(\rho(x_0)) = \frac{1}{2}\left(K(\rho(x))\rho'(x)^2 - K(\rho(x_0))\rho'(x_0)^2\right)$$

Pour $\rho \in \mathcal{A}^2_\theta(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{x_0\to-\infty} F(\rho(x_0)) = F(\alpha) = 0, \quad \lim_{x_0\to-\infty} K(\rho(x_0)) = K(\alpha), \quad \text{et } \rho'(x_0)^2 \underset{-\infty}{=} \mathcal{O}(e^{2\theta x_0}).$$

Il en résulte que, pour toute extrémale de $\mathcal{E}$, on a

$$\frac{1}{2}K(\rho(x))\rho'(x)^2 = F(\rho(x)) \tag{14}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 Etude de l'équation (14)

i) **Exemple**

On suppose dans cette question que $K = K_0$ et $F(q) = (q-\alpha)^2(q-\beta)^2$. La relation (14) devient $\frac{1}{2}K_0\rho'(x)^2 = (\rho(x)-\alpha)^2(\rho(x)-\beta)^2$.
Les données $\alpha < \beta$ incitent à rechercher une fonction ρ croissante sur $\mathbb{R}$ (voir remarque ci-dessous), d'où l'équation différentielle

$$\rho'(x) = G(\rho(x)) \quad \text{avec } G(r) = \sqrt{\frac{2}{K_0}}(\beta - r)(r-\alpha).$$

La méthode de séparation de variables de la question **I.3**, appliquée à $I = \mathbb{R}$, $J =]\alpha, \beta[$ et $a \in \mathbb{R}$ choisi tel que $\rho(a) = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, donne

$$\int_{\rho(a)}^{\rho(x)} \frac{dr}{G(r)} = x - a.$$

L'intégration s'effectue à l'aide d'une décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(\beta-r)(r-\alpha)} = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\beta-r} + \frac{1}{r-\alpha}\right),$$

ainsi

$$\int_{\rho(a)}^{\rho(x)} \frac{dr}{G(r)} = \frac{\sqrt{\frac{K_0}{2}}}{\beta-\alpha}\left[\ln\frac{r-\alpha}{\beta-r}\right]_{\rho(a)}^{\rho(x)} = \frac{\sqrt{\frac{K_0}{2}}}{\beta-\alpha}\ln\frac{\rho(x)-\alpha}{\beta-\rho(x)}$$

d'où la famille de solutions (de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) :

$$\rho : x \mapsto \frac{\alpha + \beta e^{\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\frac{K_0}{2}}}(x-a)}}{1 + e^{\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\frac{K_0}{2}}}(x-a)}} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

On constate que les solutions obtenues vérifient bien

$$\lim_{x\to-\infty} \rho(x) = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \rho(x) = \beta.$$

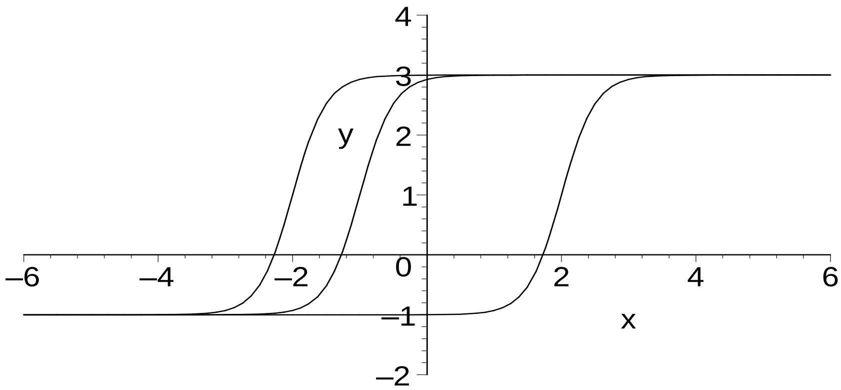

FIG. 1 – *graphes de ρ pour $\alpha = -1$ et $\beta = 3$*

On a

$$\beta - \rho(x) = \frac{\beta - \alpha}{1 + e^{\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\frac{K_0}{2}}}(x-a)}} \underset{+\infty}{\sim} (\beta - \alpha) e^{-\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\frac{K_0}{2}}}(x-a)}.$$

Ainsi $\beta - \rho(x) = \mathcal{O}(e^{-\theta x})$ lorsque $x \to +\infty$ pour tout $\theta \leq \dfrac{\beta - \alpha}{\sqrt{\frac{K_0}{2}}}$.

On a

$$\rho'(x) = \sqrt{\frac{2}{K_0}}(\beta - \rho(x))(\rho(x) - \alpha) \underset{+\infty}{\sim} (\beta - \alpha)\sqrt{\frac{2}{K_0}}(\beta - \rho(x))$$

Ainsi $\rho'(x) = \mathcal{O}(e^{-\theta x})$ lorsque $x \to +\infty$.
Plus généralement, la formule de Leibniz donne

$$\begin{aligned}
\forall k \geq 0, \quad \rho^{(k+1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{K_0}} \sum_{i=0}^{k} C_k^i (\beta - \rho(x))^{(i)} (\rho(x) - \alpha)^{(k-i)} \\
&= \sqrt{\frac{2}{K_0}} \left((-1)^k \rho^{(k)}(x)(\rho(x) - \alpha) + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i (-1)^i (\beta - \rho(x))^{(i)} \rho(x)^{(k-i)} \right).
\end{aligned}$$

Il en résulte, par récurrence sur k, que $\rho^{(k+1)}(x) = \mathcal{O}(e^{-\theta x})$ lorsque $x \to +\infty$.
En effet $(\rho(x) - \alpha)\rho^{(k)}(x) \underset{+\infty}{\sim} (\beta - \alpha)\rho^{(k)}(x)$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i (\beta - \rho(x))^{(i)} \rho(x)^{(k-i)} = \mathcal{O}(e^{-2\theta x})$.
Les résultats sont analogues en $-\infty$, ainsi $\rho \in \mathcal{A}_\theta^k(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\theta \leq \dfrac{\beta - \alpha}{\sqrt{\frac{K_0}{2}}}$.

Remarque : Justifions la simplification de (14) effectuée ci-dessus.
La condition $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \rho(x) \neq \lim_{x\to+\infty} \rho(x)$ implique que ρ n'est pas une fonction constante.
Il existe donc au moins une valeur x pour laquelle $G(\rho(x)) \neq 0$. On en déduit, par

continuité de $G \circ \rho$, l'existence d'un intervalle non trivial I sur lequel $G \circ \rho$ est non nul et de signe constant.
Par ailleurs, on $\rho'(x) = \epsilon(x) G(\rho(x))$ avec $\epsilon(x) = \pm 1$. S'il existe x_1 et x_2 dans I avec $\rho'(x_1) < 0$, $\rho'(x_2) > 0$ et $x_1 \neq x_2$ alors une propriété des fonctions dérivées (hors programme de PC*) assure l'existence de $x_3 \in I$ tel que $\rho'(x_3) = 0$, ce qui est contradictoire.
Il en résulte donc que ϵ est constant. L'équation (14) conduit à la résolution sur I de deux équations différentielles :

$$\rho'(x) = G(\rho(x)) \quad \text{et } \rho'(x) = -G(\rho(x)).$$

Les solutions de l'équation $\rho'(x) = G(\rho(x))$, avec $\rho(x) \notin [\alpha, \beta]$, sont de la forme

$$\rho : x \mapsto \frac{-\alpha + \beta e^{\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\frac{K_0}{2}}}(x-a)}}{-1 + e^{\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\frac{K_0}{2}}}(x-a)}} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

Elles sont décroissantes et présentent une discontinuité ($I \neq \mathbb{R}$) :

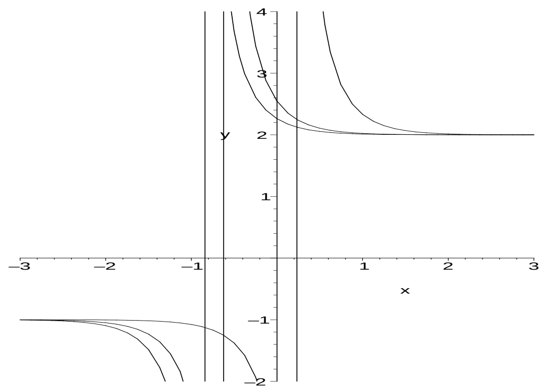

FIG. 2 – *graphes de ρ pour $\alpha = -1$ et $\beta = 2$*

La résolution de l'équation $\rho'(x) = -G(\rho(x))$ donne

$$\rho : x \mapsto \frac{\pm\alpha + \beta e^{\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{\frac{K_0}{2}}}(x-a)}}{\pm 1 + e^{\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{\frac{K_0}{2}}}(x-a)}} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

et conduit à des solutions où les conditions aux limites sont inversées :

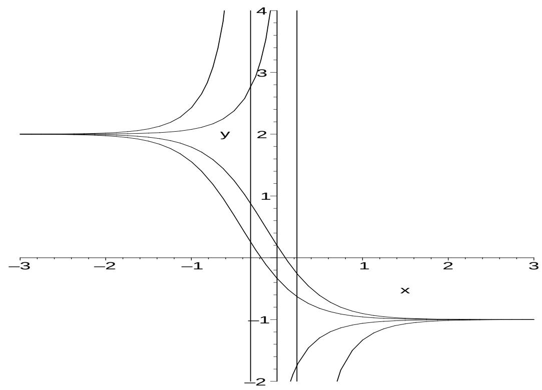

FIG. 3 – *graphes de ρ pour $\alpha = -1$ et $\beta = 3$*

ii) On revient au cas général. La fonction $q \mapsto \dfrac{2F(q)}{K(q)}$ est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^3$ et à valeurs positives. Il existe donc une unique fonction G à valeurs positives telle que $G(q)^2 = \dfrac{2F(q)}{K(q)}$. Elle est donnée par

$$G : x \mapsto \sqrt{2}\frac{\sqrt{F(q)}}{\sqrt{K(q)}}.$$

G est clairement continue sur $\mathbb{R}$.
D'après (11), la fonction $x \mapsto \sqrt{K(q)}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.
Pour établir que $G \in \mathcal{C}^2([\alpha, \beta], \mathbb{R}^+)$, il suffit de montrer que la fonction continue $\sqrt{F}$: $x \mapsto \sqrt{F(q)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta]$.
Comme la fonction racine est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, on a $\sqrt{F}$ de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]\alpha, \beta[$.
Pour tout $q \in]\alpha, \beta[$, on a

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{F}}{\mathrm{d}q}(q) = \frac{F'(q)}{2\sqrt{F(q)}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2\sqrt{F}}{\mathrm{d}q^2}(q) = \frac{2F''(q)F(q) - F'(q)^2}{4\sqrt{F(q)}^3}.$$

Etablissons l'existence de limites pour $\dfrac{\mathrm{d}\sqrt{F}}{\mathrm{d}q}(q)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\sqrt{F}}{\mathrm{d}q^2}(q)$ lorsque $q \to \alpha_+$ et $q \to \beta_-$.
Il en résultera que $\sqrt{F}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta]$.
Faisons l'étude en α (celle en β étant identique). On a

$$\begin{aligned}
F(q) &= (q-\alpha)^2\left(\frac{F''(\alpha)}{2} + (q-\alpha)\frac{F^{(3)}(\alpha)}{6} + o(q-\alpha)\right)\\
F'(q) &= (q-\alpha)\left(F''(\alpha) + (q-\alpha)\frac{F^{(3)}(\alpha)}{2} + o(q-\alpha)\right)\\
F''(q) &= F''(\alpha) + (q-\alpha)F^{(3)}(\alpha) + o(q-\alpha).
\end{aligned}$$

Les équivalences $F(q) \underset{\alpha}{\sim} (q-\alpha)^2\dfrac{F''(\alpha)}{2}$ et $F'(q) \underset{\alpha}{\sim} (q-\alpha)F''(\alpha)$ entraînent $\dfrac{d\sqrt{F}}{dq}(q) = \underset{\alpha}{\sim} \sqrt{\dfrac{F''(\alpha)}{2}}$, ce qui assure l'existence de $\displaystyle\lim_{q\to\alpha_+} \frac{\mathrm{d}\sqrt{F}}{\mathrm{d}q}(q)$.
Le calcul $2F''(q)F(q) - F'(q)^2 = (q-\alpha)^3\dfrac{F''(\alpha)F^{(3)}(\alpha)}{3} + o((q-\alpha)^3)$ et l'équivalence $\sqrt{F(q)}^3 \underset{\alpha}{\sim} (q-\alpha)^3\left(\dfrac{F''(\alpha)}{2}\right)^{3/2}$ assurent l'existence de $\displaystyle\lim_{q\to\alpha_+} \frac{\mathrm{d}^2\sqrt{F}}{\mathrm{d}q^2}(q)$.
Etablissons que G vérifie

$$\left\{\begin{array}{l}
G(q) > 0, \quad \text{pour tout } q \in]\alpha, \beta[,\\
G(\alpha) = G(\beta) = 0,\\
\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q}(\alpha) > 0 \text{ et } \dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q}(\beta) < 0.
\end{array}\right. \tag{15}$$

Les deux premières propriétés sont des conséquences immédiates de (11) et (12).
Si $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q}(\alpha) = 0$, alors $G(q) = (q-\alpha)^2\dfrac{G''(\alpha)}{2} + o((q-\alpha)^2)$ et la relation $F(q) = \dfrac{1}{2}G(q)^2K(q)$ donne un développement limité de F en α commençant par un terme en $(q-\alpha)^4$ ce qui contredit $\dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}q^2}(\alpha) > 0$.
Le raisonnement étant valable en β, on a donc $\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q}(\alpha) \neq 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q}(\beta) \neq 0$. De plus, pour $q \in]\alpha, \beta[$, on a des taux d'accroissements $\dfrac{G(q) - G(\alpha)}{q-\alpha} > 0$ et $\dfrac{G(q) - G(\beta)}{q-\beta} < 0$. D'où la troisième propriété.

Nota : On admet que (15) suffit pour construire $\rho \in \mathcal{A}_\theta^1(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{cases} \rho'(x) = G(\rho(x)), & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases}$$

avec $\theta < \min\left(\frac{dG}{dq}(\alpha), -\frac{dG}{dq}(\beta)\right)$, quel que soit $\rho_0 \in]\alpha, \beta[$.

La relation $\rho'(x) = G(\rho(x))$ implique que ρ' est de même classe que ρ et au plus de classe $\mathcal{C}^2$ (celle de G). Il en résulte que ρ est de classe $\mathcal{C}^3$.
Le calcul donne

$$\begin{cases} \rho''(x) = G'(\rho(x))\rho'(x) \\ \rho^{(3)}(x) = (G''(\rho(x))\rho'(x) + G'(\rho(x))^2)\rho'(x) \end{cases}$$

Les fonctions $x \mapsto G'(\rho(x))$ et $x \mapsto G''(\rho(x))\rho'(x) + G'(\rho(x))^2$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, donc $\rho''(x)$ et $\rho^{(3)}(x)$ ont, en $\pm\infty$, une domination analogue à celle de $\rho'(x)$.
Il en résulte que $\rho \in \mathcal{A}_\theta^3(\mathbb{R})$.

3

Désormais, ρ désigne une solution croissante de (14), construite grâce à la question **2.ii** ci-dessus. on associe ρ les fonctions P et Q comme dans la partie **II**, par les formules (4).

i) A partir des expressions des dérivées premières obtenues en **1.iii)** ci-dessus, le calcul donne

$$\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}(q,p) = F''(q) + \frac{1}{2}K''(q)p^2, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(q,p) = K'(q)p \quad \text{et } \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}(q,p) = K(q).$$

d'où le calcul des fonctions P, Q définies par (4)

$$P(x) = K(\rho(x)), \quad Q(x) = F''(\rho(x)) - \frac{1}{2}K''(\rho(x))\rho'(x)^2 - K'(\rho(x))\rho''(x).$$

La fonction ρ est bornée sur $\mathbb{R}$, ainsi les fonctions $x \mapsto K(\rho(x))$, $x \mapsto K'(\rho(x))$, $x \mapsto K''(\rho(x))$ et $x \mapsto F''(\rho(x))$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs ,on a établi que $\rho \in \mathcal{A}_\theta^3(\mathbb{R})$, ainsi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \rho'(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \rho''(x) = 0$.
ρ' et ρ'' sont donc bornées sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte que P et Q sont bornées sur $\mathbb{R}$, et la minoration (11) donne $P(x) \geq K_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ii) On note $v = \rho'$, donc v est de classe $\mathcal{C}^2$.
L'expression de $P(x)$ donne, par dérivations

$$P'(x) = K'(\rho(x))v(x) \quad \text{et } P''(x) = K''(\rho(x))v(x)^2 + K'(\rho(x))v'(x).$$

Combiné avec l'expression de $Q(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} Q(x) &= F''(\rho(x)) - \frac{1}{2}\left(P''(x) + K'(\rho(x))v'(x)\right), \\ Q(x)v(x) &= F''(\rho(x))v(x) - \frac{1}{2}\left(P''(x)v(x) + P'(x)v'(x)\right). \end{aligned}$$

La dérivation de la formule de construction de ρ, $2F(\rho(x)) = K(\rho(x))v(x)^2 = P(x)v^2$, donne

$$\begin{aligned} 2F'(\rho(x))v(x) &= P'(x)v(x)^2 + 2P(x)v(x)v'(x), \\ 2F'(\rho(x)) &= P'(x)v(x) + 2P(x)v'(x). \end{aligned}$$

Une nouvelle dérivation donne $2F''(\rho(x))v(x) = P''(x)v(x) + 3P'(x)v'(x) + 2P(x)v''(x)$
En reportant dans l'expression de $Q(x)v(x)$, on obtient

$$Q(x)v(x) = \underbrace{P'(x)v'(x) + P(x)v''(x))}_{(P(x)v'(x))'}.$$

Ainsi la fonction $v = \rho'$ est solution de l'équation différentielle (9) sur $\mathbb{R}$.

iii) La formule de construction de ρ donne $\rho''(x) = G'(\rho(x))\rho'(x)$, ainsi

$$\begin{aligned} K(\rho(x))\frac{\rho''(x)}{\rho'(x)} &= K(\rho(x))G'(\rho(x)), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(K(\rho(x))\frac{\rho''(x)}{\rho'(x)}\right) &= \left(K'(\rho(x))G'(\rho(x)) + K(\rho(x))G''(\rho(x))\right)\rho'(x). \end{aligned}$$

ρ est à valeurs dans $]\alpha,\beta[$ et $G \in \mathcal{C}^2([\alpha,\beta],\mathbb{R}^+)$ ainsi les fonctions $x \mapsto G'(\rho(x))$ et $x \mapsto G''(\rho(x))$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. On a établi en **i)** des résultats analogues pour K, K' et ρ,
En conclusion, il existe C_1 et $C_2 > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|K(\rho(x))\frac{\rho''(x)}{\rho'(x)}\right| \leq C1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{d}{dx}\left(K(\rho(x))\frac{\rho''(x)}{\rho'(x)}\right)\right| \leq C2.$$

iv) Soit $\omega > 0$ et $h \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{cases} h(x) = \mathcal{O}(e^{\omega x}) & \text{et} \quad h'(x) = \mathcal{O}(e^{\omega x}) \quad \text{lorsque } x \to -\infty, \\ h(x) = \mathcal{O}(e^{-\omega x}) & \text{et} \quad h'(x) = \mathcal{O}(e^{-\omega x}) \quad \text{lorsque } x \to +\infty. \end{cases}$$

On a $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
D'après **ii)** ci-dessus, $v = \rho'$ est solution de (9) et par construction de ρ, on a $\rho'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Comme dans la question **II.5.iii)**, on peut construire à partir de v une fonction w de classe $\mathcal{C}^2$, solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (8). Elle a pour expression

$$w(x) = \frac{-P(x)v'(x)}{v(x)} = -K(\rho(x))\frac{\rho''(x)}{\rho'(x)}.$$

Comme dans la question **II.5.ii)**, la forme quadratique (en $h'(x)$ et $h(x)$) suivante

$$fq(x) = P(x)h'(x)^2 + 2w(x)h'(x)h(x) + (Q(x) + w'(x))h(x)^2$$

a pour discriminant $w(x)^2 - P(x)(Q(x) + w'(x)) = 0$ et le coefficient de $h'(x)^2$ est $P(x) > 0$, ainsi $fq(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $X < Y$, on a

$$0 \leq \int_X^Y fq(x)\,dx = \int_X^Y \left(P(x)h'(x)^2 + Q(x)h(x)^2\right)\,dx + \underbrace{\int_X^Y 2w(x)h'(x)h(x) + w'(x)h(x)^2\,dx}_{w(Y)h(Y)^2 - w(X)h(X)^2}.$$

D'après **iii)** ci-dessus, la fonction w est bornée sur $\mathbb{R}$ et h tend vers 0 à l'infini, ainsi

$$\lim_{\substack{X\to-\infty \\ Y\to+\infty}} \int_X^Y 2w(x)h'(x)h(x) + w'(x)h(x)^2\,dx = 0.$$

D'après **i)** ci-dessus, P et Q sont bornées sur $\mathbb{R}$. Par hypothèses, on a
$h'(x)^2 = \mathcal{O}(e^{2\omega x})$ et $h(x)^2 = \mathcal{O}(e^{2\omega x})$ lorsque $x \to -\infty$, ainsi que
$h'(x)^2 = \mathcal{O}(e^{-2\omega x})$ et $h(x)^2 = \mathcal{O}(e^{-2\omega x})$ lorsque $x \to \infty$.
Il en résulte que la fonction $x \mapsto P(x)h'(x)^2 + Q(x)h(x)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et le passage aux limites $X \to -\infty$, $Y \to +\infty$ donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(P(x)h'(x)^2 + Q(x)h(x)^2\right)\,dx \geq 0,$$