

Première partie

- (a) D'après le cours, le problème de Cauchy $((E) \text{ et } \vec{F}(t_0) = \vec{F}_0)$ a une *solution unique*.

(b) $\vec{0}$ est solution de (E) ; Si une solution de (E) s'annule en t_0 , alors par unicité, on peut l'identifier à $\vec{0}$ et $\vec{F} \equiv 0$.
- (a) $\nu = \|\vec{F}\| = (\vec{F} \cdot \vec{F})^{\frac{1}{2}}$ est dérivable en tout point où $\vec{F} \cdot \vec{F}$ ne s'annule pas, donc $\vec{F}$ ne s'annule pas, ce qui est toujours réalisé si $\vec{F} \neq 0$.
 $\vec{f}$ est dérivable comme rapport de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

(b) $\|\vec{f}(t)\|^2(t) = \vec{f}^2(t) = 1 = cte$ donc $\vec{f} \cdot \vec{f}'(t) = 0$.

(c) Comme $\nu^2 = \vec{f}^2$, $\nu'(t) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{F}'(t)}{\nu(t)} = \frac{\vec{F} \cdot a(\vec{F})}{\nu}(t) = \frac{a(\nu \cdot \vec{f}) \cdot \nu \cdot \vec{f}}{\nu} = \nu \cdot a(\vec{f}) \cdot \vec{f}$.
- Donc $\frac{d\nu \cdot \vec{f}}{dt} = a(\nu \vec{f})$ devient $\nu \frac{d\vec{f}}{dt} + \frac{d\nu}{dt} \vec{f} = \nu a(\vec{f})$ soit $\nu \frac{d\vec{f}}{dt} + \nu(a(\vec{f}) \cdot \vec{f}) \cdot \vec{f} = \nu a(\vec{f})$, et, par division par $\nu \neq 0$,

$$\boxed{\frac{d\vec{f}}{dt} + (a(\vec{f}) \cdot \vec{f}) \cdot \vec{f} = a(\vec{f})}$$

Deuxième partie

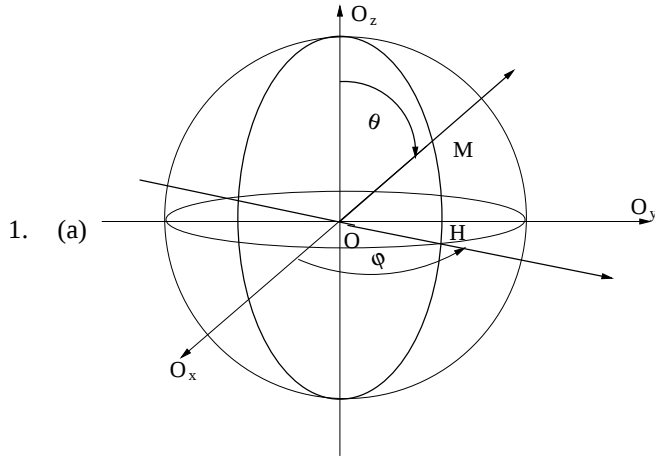
- (a) Le système s'écrit : $\begin{cases} x' = G(\lambda - 1)y \\ y' = G(\lambda + 1)x \\ z' = 0 \end{cases}$ donc $z = cte = z_0$.

(b) $x_0 = y_0 = 0$ est vérifié pour $x = y = cte = 0$, donc par unicité de la solution, la solution est bien $x = y = cte = 0, z = cte = z_0$.
- $r^2xx' + yy' = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \cdot G \cdot (\lambda - 1) \cdot xy + G \cdot (\lambda + 1) \cdot xy = G \cdot xy \cdot (\lambda + 1 - (\lambda + 1)) = 0$, c'est-à-dire que pour les courbes intégrales de (E) : $O\vec{M}' \cdot \frac{dO\vec{M}'}{dt}$ où M' est l'image de M par l'affinité : $(\vec{i} \rightarrow \frac{\vec{i}}{r}, \vec{j} \rightarrow \vec{j}, \vec{k} \rightarrow k)$.
Il en résulte que les courbes intégrales de (E) sont des ellipses, image du cercle unité par une affinité.
- (a) $x'' = G \cdot (\lambda - 1)y' = G \cdot (\lambda^2 - 1)x$ et $y'' = G \cdot (\lambda + 1) = G \cdot (\lambda^2 - 1)y$
 x et y sont solutions de l'équation différentielle $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0$.

(b) On trouve $x(t) = \lambda_1 \cos(\omega t) + \mu_1 \sin(\omega t)$ et alors $x'(t) = -\omega \lambda_1 \sin(\omega t) + \omega \mu_1 \cos(\omega t) = G \cdot (\lambda - 1)y(t)$.
Comme $\frac{\omega}{G \cdot (\lambda - 1)} = \frac{G \cdot \sqrt{1 - \lambda^2}}{-G \cdot (1 - \lambda)} = -\sqrt{\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}} = -r$, alors $y(t) = r \lambda_1 \sin(\omega t) - r \mu_1 \cos(\omega t)$.

(c) Si x n'est pas identiquement nulle, alors $\sqrt{\lambda_0^2 + \mu_0^2} \neq 0$ et $x(t) = \sqrt{\lambda_0^2 + \mu_0^2} \left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2 + \mu_0^2}} \cos(\omega t) + \frac{\mu_0}{\sqrt{\lambda_0^2 + \mu_0^2}} \sin(\omega t) \right)$.
Il existe un unique réel t_0 de $[0, 2\pi[$ tel que $\begin{cases} \cos(\omega t_0) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2 + \mu_0^2}} \\ \sin(\omega t_0) = \frac{\mu_0}{\sqrt{\lambda_0^2 + \mu_0^2}} \end{cases}$ Alors $x(t) = A \cos(\omega(t - t_0))$,
donc $x'(t) = -A\omega \sin(\omega(t - t_0)) = G \cdot (\lambda - 1)y(t)$. Comme $\frac{\omega}{G \cdot (\lambda - 1)} = \frac{G \cdot \sqrt{1 - \lambda^2}}{-G \cdot (1 - \lambda)} = -\sqrt{\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}} = -r$, $y(t) = rA \sin(\omega(t - t_0))$ et enfin, sur une intervalle où $x(t) \neq 0$: $\frac{y(t)}{x(t)} = r \tan \omega(t - t_0)$.
Avec $t := 0$, on obtient $\frac{y_0}{x_0} = r \tan \omega(-t_0)$ donc $\tan -(\omega t_0) = \frac{y_0}{r \cdot x_0}$ et $\boxed{t_0 = -\frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{y_0}{r \cdot x_0} \right)}$.

Troisième partie



H est l'intersection du méridien de la sphère unité passant par M avec l'équateur ; $(\overrightarrow{OH} = \vec{f}(t))$

$$\overrightarrow{OH} = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2 \quad \varphi(t) = (\vec{i}, \overrightarrow{OH}).$$

$$\overrightarrow{OM} = \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta \overrightarrow{OH} \quad \varphi(t) = (\vec{k}, \overrightarrow{OM}).$$

- (b) $\exists t_0 \in \mathbb{R}, \sin(\theta(t_0)) = 0 \iff \exists t_0 \in \mathbb{R}, x(t_0) = y(t_0) = 0$ alors $x = y = cte = 0$ conviennent comme solution de (E) . Par unicité d'une telle solution, $x(t)$ et $y(t)$ sont identiquement nuls et $\sin \theta = cte = 0$.
- (c) $\exists t_0 \in \mathbb{R}, \cos(\theta(t_0)) = 0 \iff \exists t_0 \in \mathbb{R}, z(t_0) = 0$ alors $z = cte = 0$ conviennent comme solution de (E) . Par unicité d'une telle solution, $z(t)$ est identiquement nul et $\cos \theta = cte = 0$.
- (d) $\sin 2\theta(t_0) = 0 \iff (\cos \theta(t_0) = 0 \text{ ou } \sin \theta(t_0) = 0) \iff ((\forall t \in \mathbb{R}, \sin \theta = 0) \text{ ou } (\forall t \in \mathbb{R}, \cos \theta = 0)) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \sin 2\theta(t) = 0 \iff (\forall t \in \mathbb{R}, \theta(t) = k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}).$

Étant donnée la continuité de θ , cette dernière propriété implique $\theta(t) = cte = k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

2. Soient $\vec{u}(t) = \cos \phi(t) \vec{e}_1 + \sin \phi(t) \vec{e}_2$ et $\vec{v}(t)$ le vecteur tel que $B_\phi(t) = (\vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{e}_3)$ soit une base orthonormale directe.

(a) $\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}^+(3)$, donc $\vec{v}(t) = -\sin \phi \vec{e}_1 + \cos \phi \vec{e}_2$.

D'autre part $\vec{f}'(t) = \phi'(t) (-\sin \theta \sin \phi \vec{e}_2 + \sin \theta \cos \phi \vec{e}_2) + \theta'(t) (\cos \theta \cos \phi \vec{e}_2 + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_2 - \sin \theta \vec{e}_3)$;

$$\boxed{\vec{f}'(t) = \theta'(t) \cos \theta \vec{u}(t) + \phi'(t) \sin \theta \vec{v}(t) - \theta'(t) \sin \theta \vec{e}_3}$$

- (b) La matrice de passage de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vers $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3)$ est

$$P = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ La matrice de } A \text{ dans } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3)$$

est donc

$$\boxed{A_\phi(t) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2\lambda \cos \phi \sin \phi & -1 + \lambda(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) & 0 \\ 1 + \lambda(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) & 2\lambda \cos \phi \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

- (c) $\vec{f}(t) = \sin \theta \vec{u}(t) + \cos \theta \vec{e}_3$, donc

$$a(\vec{f}(t)) = \sin \theta a(\vec{u}(t)) = G \cdot (2\lambda \cos \phi \sin \phi \sin \theta) \vec{u}(t) + G \cdot (1 + \lambda(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)) \sin \theta \vec{v}(t)$$

$$a(\vec{f}(t)) \cdot \vec{f}(t) = G \cdot (2\lambda \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta \text{ car } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3) \text{ est orthonormée}).$$

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = -(a(\vec{f}(t)) \cdot \vec{f}(t)) \vec{f} + a(\vec{f}) \quad (e)$$

3. (a) devient par projection sur $\vec{u}, \vec{v}$ puis $\vec{e}_3$

$$\theta' \cos \theta = -2G\lambda \cos \phi \sin \phi \sin^3 \theta + 2\lambda \cos \phi \sin \phi \sin \theta \quad (E_1)$$

$$\phi' \sin \theta = 0 + G(1 + \lambda(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)) \quad (E_2)$$

$$-\theta' \sin \theta = -2G\lambda \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta \cos \theta + \quad (E_3)$$

- (b) si $\vec{f}_0$ et $\vec{e}_3$ ne sont pas colinéaires, alors $\sin(2\theta_0) \neq 0$ donc $\sin(2\theta)$ ne s'annule pas, et $(E_1) \iff \theta' \cos \theta = -2G\lambda \cos \phi \sin \phi \sin \theta(1 - \sin^2 \theta)$, après division par $\cos \theta$, donne le même résultat que (E_3) après division par $\sin \theta$, soit : (2) : $\frac{d\theta}{dt} = 2G\lambda \sin \phi \cos \phi \sin \theta \cos \theta$.

De même, (E_3) donne (1) : $\frac{d\phi}{dt} = 2G\lambda \cos^2 \phi + G(1 - \lambda)$ après division par $\sin \theta$.

4. Lorsque $\lambda = 0$, $\theta' = 0$, donc $\theta = \theta_0 = cte$ et $\phi' = G.(1 - \lambda)$, donc $\phi = G.(1 - \lambda)(\phi - \phi_0) + \phi_0$.

La trajectoire parcourue par le point m est le parallèle de la sphère défini par $\theta = \theta_0$.

5. (a) $\phi' = 2\lambda \cos^2 \phi + 1 - \lambda = 1 + \lambda \cos 2\phi > 1 - |\lambda| > 0$ Donc ϕ' ne s'annule pas, et en outre, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\phi(t) - \phi(0)| > (1 - |\lambda|) \cdot |t|$, et donc $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\phi(t)| = +\infty$;

donc toute solution ϕ de (1) est strictement monotone, et non bornée ; ϕ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

- (b) θ' est identiquement nulle, ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta) = 0$, ce qui implique $\sin(2\theta_0) = 0$

Réciproquement, si $\sin(2\theta_0) = 0$, alors θ coïncide en $t = 0$ avec une solution constante donc elle lui est égale par unicité.

- (c) (2) $\frac{d\theta}{dt} = 2G\lambda \sin \phi \cos \phi \sin \theta \cos \theta$ s'écrit si $\sin(2\theta)$ ne s'annule pas : $\frac{d\theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = G \cdot \lambda \cdot \sin \phi \cos \phi dt$

Or $\frac{d\phi}{dt} = 2G\lambda \cos^2 \phi + G(1 - \lambda) = G \cdot (\lambda \cos 2\phi + 1)$ d'après (1) donc (2) devient

$\frac{d\theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\phi d\phi}{\lambda \cos 2\phi + 1}$, une équation à variables séparées. Il reste à intégrer :

$$\int \frac{d\theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = \int \frac{\sin \theta d\theta}{2 \sin^2 \theta \cos \theta} \stackrel{u:=\cos \theta}{=} \int \frac{-du}{2(1-u^2)u} \stackrel{v:=u^2}{=} \frac{-1}{4} \int \frac{dv}{2(1-v)v} = \frac{1}{4} \ln \frac{1-v}{v} = \frac{1}{2} \ln |\tan \theta| \text{ et } \int \frac{\sin 2\phi d\phi}{\lambda \cos 2\phi + 1} = -\frac{1}{2} \ln(1 + 2 \cos 2\phi) ;$$

Or $1 + \lambda \cos 2\phi = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi + \lambda(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = (1 + \lambda) \cos^2 \phi + (1 - \lambda) \sin^2 \phi =$

$(1 - \lambda) \left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \right) = (1 - \lambda)(r^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi)$ donc

$$(2) \iff \ln |\tan \theta| = -\frac{1}{2} \ln(r^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + cte \text{ soit } \tan \theta = C \cdot \sqrt{r^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi}$$

6. (a) $\phi'_2(t) = \phi'_1(t - t_1)$; en réalisant $t \mapsto t - t_1$ dans (1) :

$$\frac{d\phi_1}{dt}(t - t_1) = 2G \cdot \lambda \cos^2(\phi_1(t - t_1)) + G \cdot (1 - \lambda) \text{ soit } \phi'_2(t) = 2G \cdot \lambda \cos^2 \phi_2 + G \cdot (1 - \lambda).$$

$\mathcal{C}_\lambda$ est globalement invariant par les rotations d'axe O_z

- (b) $\phi'_3(t) = \phi'_1(-t)$; en réalisant $t \mapsto -t$ dans (1) :

$$\frac{d\phi_1}{dt}(-t) = 2G \cdot \lambda \cos^2(-\phi_1(-t)) + G \cdot (1 - \lambda) \text{ soit } \phi'_3(t) = 2G \cdot \lambda \cos^2 \phi_3(t) + G \cdot (1 - \lambda).$$

$\mathcal{C}_\lambda$ est globalement invariant par la réflexion de plan O_{xz}

- (c) $\phi'_4(t) = \phi'_1(-t)$;

$$2\lambda \cos^2 \phi_1(t) + 1 - \lambda = 2\lambda \sin^2 \phi_4(t) + 1 - \lambda = 2\lambda(1 - \cos^2 \phi_4(t)) + 1 - \lambda = 1 + \lambda - 2\lambda \cos^2 \phi_4(t)$$

$$\text{donc } \frac{d\phi_1}{dt}(-t) = 2G \cdot \lambda \cos^2(-\phi_1(t)) + G \cdot (1 - \lambda) = -2G \cdot \lambda \cos^2(\phi_4(t)) + G \cdot (1 + \lambda) = \frac{d\phi_4}{dt}(t) \text{ soit}$$

$$\phi'_3(t) = 2G \cdot \lambda \cos^2 \phi_3(t) + G \cdot (1 - \lambda).$$

$\mathcal{C}_{-\lambda}$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_\lambda$ par la réflexion de plan $y = x$

7. (a) $u = \tan \phi$ donc $\phi = \arctan u$; $\frac{d\phi}{du} = \frac{1}{1+u^2}$ et $\cos^2 \phi = \frac{1}{1+\tan^2 \phi} = \frac{1}{1+u^2}$.

$$\text{Alors } \frac{1}{1+u^2} = \frac{d\phi}{du} = \frac{dt}{du} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \tau'(u) \frac{d\phi}{dt} = \tau'(u) \left(\frac{2G\lambda}{1+u^2} + G(1 - \lambda) \right) \text{ et } 1 = \tau'(u)(2G\lambda + G(1 - \lambda)(1 + u^2)) = G \cdot \tau'(u)((1 + \lambda) + (1 - \lambda)u^2) = \tau'(u) \cdot G \cdot (1 - \lambda)(r^2 + u^2).$$

$$\text{L'équation (1) devient finalement : } \tau'(u) = \frac{1}{G(1 - \lambda)} \frac{1}{1 + u^2}.$$

- (b) Cette nouvelle équation s'intègre en : $t = \tau(u) = \tau_k + \frac{1}{G \cdot r(1 - \lambda)} \arctan \frac{u}{r}$ si $t \in]t_k, t_{k+1}[$.

$$\text{Lorsque } t \rightarrow t_k, \phi(t) \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi; \tan \phi(t) \rightarrow -\infty \text{ et } \arctan \left(\frac{\tan \phi(t)}{r} \right) \rightarrow -\frac{\pi}{2}. t_k = \tau_k - \frac{\pi}{2G \cdot r(1 - \lambda)}$$

$$\text{donc } \boxed{\tau_k = t_k + \frac{\pi}{2G \cdot r(1 - \lambda)}}$$

(c) $\tan \phi = u = r \tan \left(Gr(1 - \lambda)t - Gr(1 - \lambda)\tau_k \right) = r \tan \left(Gr(1 - \lambda)(t - t_k) - \frac{\pi}{2} \right)$ donc

$$\tan \phi = \frac{-r}{\tan Gr(1 - \lambda)(t - t_k)}$$

Or $r(1 - \lambda) = \sqrt{1 - \lambda^2}$ et $r + \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}} + \sqrt{\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$

Les solutions de (1) sont périodiques de période $\frac{2\pi}{Gr(1 - \lambda)} = \frac{\pi}{G} \left(r + \frac{1}{r} \right) = \frac{2\pi}{\omega}$