Centrale 2017 - Psi Maths 2

I. Préliminaires

I.A.1) Si $z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est p-périodique, $\{z_k,\, k \in \mathbb{N}\}$ se réduit à l'ensemble fini (donc borné) $\{z_k,\, 0 \leq k < p\}$.

I.A.2) Les suites 1-périodiques sont les suites constantes.

I.A.3) Si $z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est p-périodique, et pour $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $z_{n+kp} = z_n$ résulte d'une récurrence évidente sur k.

I.A.4) Soit $z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, convergente vers ℓ et p-périodique. Soit $n \in \mathbb{N}$, quelconque.
D'après (I.A.3), la suite $k \mapsto z_{n+kp}$ est constante en z_n.
Elle est aussi extraite de z donc convergente vers ℓ. On en déduit $z_n = \ell$, pour tout n.
Ainsi la suite z est constante (et la réciproque est évidente).

I.B.1) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $C = AB = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
Alors $|c_{i,j}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| \leq \|A\|_0 \sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}| \leq n\|A\|_0\|B\|_0$.
Comme c'est vrai pour tous i, j dans $[\![1, n]\!]$, on en déduit : $\|AB\|_0 \leq n\|A\|_0\|B\|_0$.

I.B.2) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Y = (y_j)_{1\leq j\leq n}$ dans $\mathbb{C}^n$. Soit $Z = AY = (z_i)_{1\leq i\leq n}$.
Alors $|z_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}y_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|y_j| \leq \|A\|_0 \sum_{j=1}^{n} |y_j| \leq n\|A\|_0\|Y\|_0$.
Comme c'est vrai pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on en déduit : $\|AY\|_0 \leq n\|A\|_0\|Y\|_0$.

II. Exemples de suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients périodiques

II.A.1) Soit $\Delta = a^2 - 4$ le discriminant de l'équation caractéristique $\mathcal{C} : r^2 + ar + 1 = 0$.

- Si $\Delta \neq 0$, c'est-à-dire si $a \notin \{-2, 2\}$, notons r_1, r_2 les racines complexes distinctes de $\mathcal{C}$.
  Dans ces conditions, Sol(II.1) $= \left\{z \mapsto z_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\right\}$.
- Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si $a \in \{-2, 2\}$, alors $\mathcal{C}$ possède la racine double $r_1 = r_2 = -\dfrac{a}{2}$.
  Dans ces conditions, Sol(II.1) $= \left\{z \mapsto z_k = (\alpha k + \beta)r_1^k,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\right\}$.

Dans tous les cas, on a bien sûr $r_1 + r_2 = -a$ et $r_1 r_2 = 1$.

II.A.2) On suppose $|a| > 2$. Ainsi $\begin{cases} 2 < |a| \leq |r_1| + |r_2| \\ |r_1|\,|r_2| = 1 \end{cases}$ et on peut par exemple choisir $0 < |r_1| < 1 < |r_2|$.

Soit $z\colon k \mapsto \alpha r_1^k + \beta r_2^k$ une solution p-périodique de (II.1).

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $z_{k+p} = z_k$ c'est-à-dire $\alpha r_1^{k+p} + \beta r_2^{k+p} = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$.
  Il en résulte $\begin{cases} \alpha r_1^p = \alpha \\ \beta r_2^p = \beta \end{cases}$ par unicité de l'écriture dans la base $\begin{cases} k \mapsto r_1^k \\ k \mapsto r_2^k \end{cases}$ de Sol(II.1)
  Du fait que $r_1^p \neq 1$ et $r_2^p \neq 1$, il vient $\alpha = \beta = 0$, donc z est la suite nulle.
- Autre rédaction : nécessairement $\beta = 0$ sans quoi la suite $z\colon k \mapsto z_k \sim \beta z_2^k$ ne serait pas bornée (cf I.A.1).
  Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_k = 0$ (car $|r_1| < 1$) donc z est constante en 0 (cf I.A.2) c'est-à-dire z est la suite nulle.

II.A.3) Si $a = -2$, alors Sol(II.1) $= \{z \mapsto z_k = \alpha k + \beta,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$ est l'ensemble de suites arithmétiques.
Il y a en particulier toutes les suites constantes, et les suites non bornées $k \mapsto \alpha k$ quand $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

II.A.4) Si $a = 2$, alors Sol(II.1) $= \{z \mapsto z_k = (\alpha k + \beta)(-1)^k,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$.
On y trouve les suites 2-périodiques $k \mapsto \beta(-1)^k$ ($\beta \in \mathbb{C}$) et les suites non bornées $k \mapsto \alpha k(-1)^k$ ($\alpha \in \mathbb{C}^*$).

II.A.5) On choisit $a = 2\cos\dfrac{2\pi}{p}$. On a $-2 < a < 2$ (et même $-1 \leq a < 2$ car $p \geq 3$).

On a alors $r^2 + ar + 1 = \big(r - \mathrm{e}^{2i\pi/p}\big)\big(r - \mathrm{e}^{-2i\pi/p}\big)$ donc on peut choisir $r_1 = \mathrm{e}^{2i\pi/p}$ et $r_2 = \mathrm{e}^{-2i\pi/p}$.

Dans ce cas, $\mathrm{Sol(II.1)} = \big\{z \mapsto z_k = \alpha\mathrm{e}^{2ik\pi/p} + \beta\mathrm{e}^{-2ik\pi/p},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2\big\}$.

Avec ce choix de a, toutes les solutions de (II.1) sont p-périodiques.

II.B.1) Clairement, Sol(II.2) est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et Ψ est linéaire de Sol(II.2) dans $\mathbb{C}^2$.

Par ailleurs, compte-tenu de la relation (II.2) où les b_k sont non nuls, une suite $z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de Sol(II.2) est définie de manière unique par la donnée de z_0 et z_1 (récurrence immédiate de pas deux sur l'entier k).

Ainsi Ψ est bijective : c'est un isomorphisme de Sol(II.2) sur $\mathbb{C}^2$.

II.B.2) Soit $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux éléments de Sol(II.2). Soit $W\colon k \mapsto W_k = b_k(y_k z_{k+1} - z_k y_{k+1})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en utilisant (II.2) pour remplacer z_{k+2} et y_{k+2} :

$$\begin{aligned} W_{k+1} &= b_{k+1}(y_{k+1}z_{k+2} - z_{k+1}y_{k+2}) \\ &= y_{k+1}\big(-a_{k+1}z_{k+1} - b_k z_k\big) - z_{k+1}\big(-a_{k+1}y_{k+1} - b_k y_k\big) \\ &= b_k(y_k z_{k+1} - z_k y_{k+1}) = W_k \text{ (ce qui prouve que la suite } W \text{ est constante)} \end{aligned}$$

II.B.3 On sait que Ψ est un isomorphisme de Sol(II.2) sur $\mathbb{C}^2$. On en déduit les équivalences :

Les suites $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une base de Sol(II.2)

$\Leftrightarrow$ $\Psi(y) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\Psi(z) = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{C}^2$

$\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = y_0 z_1 - z_0 y_1 \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $W_0 = b_0(y_0 z_1 - z_0 y_1) \neq 0$ (car $b_0 \neq 0$)

II.C) On a les équivalences suivantes :

La suite $(z_k)_{0\leq k\leq n}$ est élément de Sol(II.2)

$\Leftrightarrow$ $\forall k \in \mathbb{N},\ z_{k+2} = \dfrac{1}{b_{k+1}}(-b_k z_k - a_{k+1}z_{k+1})$

$\Leftrightarrow$ $\forall k \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} z_{k+1} \\ z_{k+2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{b_{k+1}} \begin{pmatrix} 0 & b_{k+1} \\ -b_k & -a_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_k \\ z_{k+1} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $\forall k \in \mathbb{N},\ Z_{k+1} = A_k Z_k$, avec $A_k = \dfrac{1}{b_{k+1}} \begin{pmatrix} 0 & b_{k+1} \\ -b_k & -a_{k+1} \end{pmatrix}$ (qui est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en fait)

II.D.1) D'après ce qui précède, on a $\det A_k = \dfrac{b_k}{b_{k+1}}$ pour tout k.

On en déduit (par téléscopage, puis sachant que $b_p = b_0$) : $\det Q = \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \det(A_k) = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{b_0}{b_p} = 1$.

II.D.2) L'égalité $Z_{kp} = Q^k Z_0$ est évidente si $k = 0$.

On la suppose donc vraie pour un certain rang $k \geq 0$. Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} Z_{(k+1)p} &= Z_{kp+p} = A_{kp+p-1}Z_{kp+p-1} = A_{kp+p-1}A_{kp+p-2}Z_{kp+p-2} = \cdots \\ &= A_{kp+p-1}A_{kp+p-2}\cdots A_{kp}\, Z_{kp} \end{aligned}$$

Mais la suite $k \mapsto A_k$ est p-périodique, donc $A_{kp+p-1}A_{kp+p-2}\cdots A_{kp} = A_{p-1}A_{p-2}\cdots A_0 = Q$.

Ainsi $Z_{(k+1)p} = Q\, Z_{kp} = QQ^k Z_0 = Q^{k+1} Z_0$, ce qui achève la récurrence.

De même, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![1, p-1]\!]$:

$$\begin{aligned} Z_{kp+r} &= A_{kp+r-1}Z_{kp+r-1} = A_{kp+r-1}A_{kp+r-2}Z_{kp+r-2} = \cdots \\ &= A_{kp+r-1}A_{kp+r-2}\cdots A_{kp}\, Z_{kp} = A_{r-1}A_{r-2}\cdots A_0\, Z_{kp} = A_{r-1}A_{r-2}\cdots A_0\, Q^k Z_0 \end{aligned}$$

II.E.1) – Soit $z=(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ non nulle dans Sol(II.2), et $Z=(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite associée dans $\mathbb{C}^2$. On a $Z_0=\Psi(z)\neq 0$.
On suppose que z est p-périodique. Alors Z est p-périodique, donc $Z_p=Z_0$.
Mais $Z_p=QZ_0$ d'après II.D.2). Ainsi $QZ_0=Z_0$, donc Z_0 est vecteur propre de Q pour la valeur propre 1.

– Réciproquement, on suppose que $1\in\mathrm{Sp}(Q)$, et soit $U\in\mathbb{C}^2$ un vecteur propre associé.
Soit $z=(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ l'antécédent (non nul, donc) de U par Ψ.
Comme précédemment, soit $Z=(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite associée dans $\mathbb{C}^2$. On a $Z_0=\begin{pmatrix}z_0\\z_1\end{pmatrix}=U\neq 0$.
On a $QZ_0=Z_0$ donc $Q^kZ_0=Z_0$ pour tout k. Soit $m=kp+r$ dans $\mathbb{N}$, avec $r\in[\![0,p-1]\!]$.
D'après II.D.2, on a : $Z_m=Z_{kp+r}=A_{r-1}A_{r-2}\cdots A_0Z_0$ (en convenant que $A_{r-1}A_{r-2}\cdots A_0=I_2$ si $r=0$).
Ainsi $Z_m=\begin{pmatrix}z_m\\z_{m+1}\end{pmatrix}$, donc z_m, ne dépendent que du reste r dans la division de m par p.
Autrement dit, la suite z, élément non nul de Sol(II.2), est p-périodique.

II.E.2) – On a $\det(Q)=1$. Le polynôme caractéristique de Q s'écrit donc $\det(XI_2-Q)=X^2-\mathrm{tr}(Q)X+1$.
Dans ces conditions : $1\in\mathrm{Sp}(Q)\Leftrightarrow\det(I_2-Q)=0\Leftrightarrow\mathrm{tr}(Q)=2$.
Conclusion : (II.2) possède une solution non nulle p-périodique si et seulement si $\mathrm{tr}(Q)=2$.

– Dans ce cas $\chi_Q(X)=(X-1)^2$: il existe $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $\alpha\in\mathbb{C}$ tels que $Q=PTP^{-1}$, avec $T=\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix}$.

– Si $\alpha=0$, alors $Q=I_2$ et $\forall(k,r)\in\mathbb{N}^2,\ Z_{kp+r}=A_{r-1}A_{r-2}\cdots A_0Z_0$ (notations usuelles) dépend de r seul.
Ainsi toutes les suites Z, donc toutes les suites $z=(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ solutions de (II.2), sont p-périodiques.

– Si $\alpha\neq 0$, soit $z=(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ l'élément de Sol(II.2) tel que $Z_0=\begin{pmatrix}z_0\\z_1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ($2^{\text{ième}}$ colonne de P).
On trouve facilement $T^k=\begin{pmatrix}1&k\alpha\\0&1\end{pmatrix}$ donc $Z_{kp}=Q^kZ_0=PT^kP^{-1}P\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&k\alpha\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}k\alpha\\1\end{pmatrix}$.
Ainsi $k\mapsto\begin{pmatrix}k\alpha\\1\end{pmatrix}$, donc $k\mapsto Z_{kp}$, donc $k\mapsto Z_k$, donc $k\mapsto z_k$ sont des suites non bornées.

II.E.3) La matrice Q étant dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'hypothèse $|\mathrm{tr}(Q)|<2$ s'écrit $\mathrm{tr}(Q)\in]-2,2[$.
Posons $\mathrm{tr}(Q)=2\cos(\theta)$, avec $0<\theta<\pi$.
Les valeurs propres de Q sont les racines $r=\mathrm{e}^{i\theta}$ et $s=\mathrm{e}^{-i\theta}$ de $\chi_Q(X)=X^2-2\cos(\theta)X+1$.
Dans ces conditions Q est semblable à $D=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i\theta}&0\\0&\mathrm{e}^{-i\theta}\end{pmatrix}$ donc Q^k est semblable à $D^k=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{ik\theta}&0\\0&\mathrm{e}^{-ik\theta}\end{pmatrix}$.
La suite $k\mapsto Q^k$ est donc bornée.
Reprenons les résultats de II.D.2, notamment $Z_{kp+r}=A_{r-1}A_{r-2}\cdots A_0\,Q^kZ_0$ ($k\in\mathbb{N},\ r\in[\![0,p-1]\!]$).
Les $\|Z_{kp+r}\|_0$ peuvent être bornés indépendamment de k et r (il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de r).
Il en résulte que les solutions de (II.3), donc celles de (II.2), sont bornées.

III. Généralisation

III.A) – Les matrices A_k sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Il est donc de même des Φ_k (récurrence évidente sur $k\in\mathbb{N}$).

– Supposons $Y_k=\Phi_kY_0$ pour tout k. Alors : $\forall k\in\mathbb{N},\ Y_{k+1}=\Phi_{k+1}Y_0=A_k\Phi_kY_0=A_kY_k$.

– Réciproquement, supposons $Y_{k+1}=A_kY_k$ pour tout k.
On a bien sûr $Y_0=\Phi_0Y_0$. Et si $Y_k=\Phi_kY_0$, alors $Y_{k+1}=A_kY_k=A_k\Phi_kY_0=\Phi_{k+1}Y_0$.

Attention : les matrices A_k ne sont pas supposées commuter.
On peut donc écrire $\Phi_k=A_{k-1}A_{k-2}\cdots A_0$, mais la notation $\Phi_k=\prod_{j=0}^{k-1}A_j$ est à proscrire car ambiguë.

III.B.1) L'égalité $\Phi_{k+p} = \Phi_k\Phi_p$ étant évidente si $k = 0$, on suppose $k \geq 1$.

La suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est p-périodique, c'est-à-dire $A_{j+p} = A_j$ pour tout entier j.

Ainsi $\Phi_{k+p} = A_{p+k-1}A_{p+k-2}\cdots A_p\overbrace{A_{p-1}A_{p-2}\cdots A_0}^{\Phi_p} = \overbrace{A_{k-1}A_{k-2}\cdots A_0}^{\Phi_k}\Phi_p = \Phi_k\Phi_p$.

III.B.2) (a) Soit $U \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de Φ_p pour la valeur propre ρ.

On considère la solution (non nulle) de (III.1) définie $\forall k \in \mathbb{N},\ Y_k = \Phi_k U$ (donc $Y_0 = U$).

Pour tout entier k, on a alors : $Y_{k+p} = \Phi_{k+p}U = \Phi_k\Phi_p U = \Phi_k\rho U = \rho Y_k$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$, et soit $k = qp + r$ sa division euclidienne par n.

Par récurrence sur q, on trouve : $Y_k = Y_{r+qp} = \rho^q Y_r$, donc $\|Y_k\|_\infty = |\rho|^q\|Y_r\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Cela étant vrai pour chaque $r \in [\![0, p-1]\!]$, il en résulte $\lim\limits_{k\to+\infty} \|Y_k\|_\infty = 0$.

III.C) Les égalités $\Phi_k = P_kB^k$ équivalent à $P_k = \Phi_kB^{-k}$, ce qui assure l'unicité de la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Réciproquement, les $P_k = \Phi_kB^{-k}$ sont inversibles et (sachant que $\Phi_{k+p} = \Phi_k\Phi_p$ et $\Phi_pB^{-p} = I_n$) :

$\forall k \in \mathbb{N},\ P_{k+p} = \Phi_{k+p}B^{-k-p} = \Phi_k\Phi_pB^{-p}B^{-k} = \Phi_kB^{-k} = P_k$: la suite $k \mapsto P_k$ est donc p-périodique.

III.D.1) La suite $k \mapsto \|P_k\|_0$ est p-périodique donc ne prend que p valeurs au plus, ce qui justifie la définition de M.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en utilisant (I.B.1) on a : $\|\Phi_k\|_0 = \|P_kB^k\|_0 \leq n\|P_k\|_0\|B^k\|_0 \leq nM\|B^k\|_0$

III.D.2) (a) Pour tout k, on a $Y_k = \Phi_kY_0$ donc (en utilisant (I.B.2) et (III.D.1)) :

$$\|Y_k\|_\infty \leq n\|\Phi_k\|_0\,\|Y_0\|_\infty \leq nM\|B^k\|_0\,\|Y_0\|_\infty \quad (\star)$$

Il en résulte que si $\lim\limits_{k\to+\infty} \|B^k\|_0 = 0$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \|Y_k\|_\infty = 0$.

(b) Le résultat $(\star)$ dit à l'évidence que si $k \mapsto \|B^k\|_0$ est bornée, alors $k \mapsto \|Y_k\|_\infty$ est bornée.

III.E.1) Si $R(0) = 0$, c'est-à-dire si $X \mid R(X)$, alors $X^p \mid R(X^p)$ donc $R(X^p)$ n'est pas scindé simple (rappel $p \geq 2$).

Supposons $R(0) \neq 0$. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ les racines complexes (non nulles et distinctes deux à deux) de $R(X)$.

Les racines de $R(X^p)$ (qui est degré $p \times d$) sont alors les $p \times d$ racines p-ièmes des différents λ_i.

Mais elles sont distinctes deux à deux (les racines p-ièmes d'un même λ_i sont distinctes car $\lambda_i \neq 0$; et si $i \neq j$ alors $\lambda_i \neq \lambda_j$ donc toute racine p-ième de λ_i est distincte de toute racine p-ième de λ_j).

III.E.2) Si B est diagonalisable ($B = QDQ^{-1}$ et D diagonale) alors $\Phi_p = B^p = QD^pQ^{-1}$ est diagonalisable.

Réciproquement, on suppose que Φ_p est diagonalisable. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ ses valeurs propres distinctes.

Les λ_i sont non nulles car Φ_p est inversible. De plus Φ_p est annulée par $R(X) = \prod\limits_{k=1}^{d}(X - \lambda_i)$.

D'après III.E.1, $S(X) = R(X^p)$ est scindé simple, et $S(B) = R(B^p) = R(\Phi_p) = 0$. Donc B est diagonalisable.

III.E.3) Par hypothèse $B = QDQ^{-1}$, avec Q inversible, et D diagonale à coefficients diagonaux de module < 1.

On a alors clairement $\lim\limits_{k\to+\infty} \|D^k\|_\infty = 0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \|B^k\|_\infty = 0$.

D'après III.D.2), il en résulte $\lim\limits_{k\to+\infty} \|Y_k\|_\infty = 0$ pour toute solution de (III.1).

IV. Le cas continu en dimension 2

IV.A.1) Il est clair que $E(t_0) = [U(t_0), V(t_0)] = \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] = I_2$.

Par ailleurs : $\forall t \in \mathbb{R},\ E'(t) = [U'(t), V'(t)] = [A(t)U(t), A(t)V(t)] = A(t)[U(t), V(t)] = A(t)E(t)$.

Ainsi $t \mapsto E(t)$ est la solution de (IV.2) qui vérifie la condition initiale $E(t_0) = I_2$.

IV.A.2) Pour tout réel t, on a $M'(t) = A(t)M(t)$, donc $[F'(t), G'(t)] = A(t)[F(t), G(t)]$, donc $\begin{cases} F'(t) = A(t)F(t) \\ G'(t) = A(t)G(t) \end{cases}$

Ainsi F et G, donc leur combinaison linéaire $t \mapsto M(t)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = w_1 F(t) + w_2 G(t)$, sont solutions de (IV.1).

IV.B.1) On sait que $t \mapsto Y(t) = E(t)W$ est solution de (IV.1). Par hypothèse $Y(t_1) = E(t_1)W = 0$.

Ainsi Y est la solution nulle (unicité de la réponse au problème de Cauchy pour le système homogène IV.1).

En particulier le vecteur $Y(t_0) = E(t_0)W = W$ est nul.

Ainsi $\mathrm{Ker}(E(t_1)) = \{0\}$ (c'est-à-dire $E(t_1)$ est inversible) pour tout réel t_1.

IV.B.2) La fonction $t \mapsto N(t) = E(t)M(t_0)$ vérifie : $\forall t \in \mathbb{R},\ N'(t) = E'(t)M(t_0) = A(t)E(t)M(t_0) = A(t)N(t)$.

D'autre part $N(t_0) = E(t_0)M(t_0) = M(t_0)$. Par unicité (problème de Cauchy) on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ N(t) = M(t)$.

IV.B.3) On définit la fonction $t \mapsto M(t) = E(t+T) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Posons $B = M(t_0)$.

On sait que $t \mapsto E(t)$ vérifie (IV.2) et que $t \mapsto A(t)$ est T-périodique. On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = E'(t+T) = A(t+T)E(t+T) = A(t)E(t+T) = A(t)M(t)$$

Ainsi M vérifie (IV.2) donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ M(t) = E(t)M(t_0)$ c'est-à-dire : $\forall t \in \mathbb{R},\ E(t+T) = E(t)B$.

Pour $t = t_0$, on trouve $B = E(t_0 + T)$, ce qui assure l'unicité.

IV.C.1) (a) Pour tout réel t, on a : $Y(t+T) = E(t+T)Z = E(t)BZ = E(t)(\rho Z) = \rho E(t)Z = \rho Y(t)$.

(b) Il existe $\mu \in \mathbb{C}$ (défini à un multiple de $2i\pi/T$ près) tel que $\mathrm{e}^{\mu T} = \rho$.

Posons : $\forall t \in \mathbb{R},\ S(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}Y(t)$. On a $Y(t_0) = E(t_0)Z = Z \neq 0$ donc $S(t_0) \neq 0$.

Alors, pour tout réel t : $S(t+T) = \mathrm{e}^{-\mu t}\,\mathrm{e}^{-\mu T}\,Y(t+T) = \mathrm{e}^{-\mu t}\,\mathrm{e}^{-\mu T}\rho\,Y(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}\,Y(t) = S(t)$.

La fonction $t \mapsto S(t)$ est donc T-périodique, non nulle, et on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \mathrm{e}^{\mu t}S(t)$.

Puisque $\mathrm{e}^{\mu T} = \rho$, on peut aussi écrire (et c'est plus parlant) : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \rho^{t/T}S(t)$.

Avec cette écriture, on voit mieux l'identité $Y(t+T) = \rho Y(t)$.

IV.C.2) On va montrer que la condition demandée est « 1 est valeur propre de B ».

– On suppose que $\rho = 1$ est valeur propre de B, et on note Z un vecteur propre associé.

Depuis IV.C.1), on sait que $t \mapsto Y(t) = E(t)Z$ est solution de IV.1) et que : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t+T) = Y(t)$.

– Réciproquement, soit $t \mapsto Y(t)$ une solution non nulle (donc jamais nulle) et T-périodique de (IV.1).

La fonction $t \mapsto M(t) = [Y(t), Y(t)]$ est alors une solution non nulle det T-périodique de (IV.2).

Dans ces conditions, on trouve $M(t_0) = M(t_0 + T) = E(t_0 + T)M(t_0) = E(t_0)BM(t_0) = BM(t_0)$.

Ainsi $BY(t_0) = Y(t_0)$ (avec $Y(t_0) \neq 0$), ce qui prouve que 1 est valeur propre de B.

IV.C.3) On suppose que la matrice B est diagonalisable.

Soit Z_1, Z_2 une base de diagonalisation de B, pour les valeurs propres respectives ρ_1 et ρ_2.

Les fonctions $\begin{cases} t \mapsto Y_1(t) = E(t)Z_1 \\ t \mapsto Y_2(t) = E(t)Z_2 \end{cases}$ forment alors une base du plan des solutions du système (IV.1).

D'après (IV.C.1.b), on peut écrire : $\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} Y_1(t) = \rho_1^{t/T}\,S_1(t) \\ Y_2(t) = \rho_2^{t/T}S_2(t) \end{cases}$ où S_1, S_2 sont T-périodiques (donc bornées).

– Si $|\rho_1| \leq 1$ et si $|\rho_2| \leq 1$ alors Y_1 et Y_2 (donc toutes les solutions de (IV.1)) sont bornées sur $\mathbb{R}$.

– En revanche si par exemple $|\rho_1| > 1$, alors la solution Y_1 n'est pas bornée.

IV.D.1) – Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et $\varphi\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(u,v) = \det(Mu, v) + \det(u, Mv)$.

Alors φ est bilinéaire alternée, donc proportionnelle à l'application déterminant.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall (u,v) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2,\ \varphi(u,v) = \lambda \det(u,v)$.

Si on choisit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on trouve $\lambda = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = a + d = \mathrm{tr}(M)$.

Ainsi : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \forall (u,v) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2,\ \det(Mu, v) + \det(u, Mv) = \mathrm{tr}(M)\det(u,v)$.

– Pour tout réel t, on a $W(t) = \det[U(t), V(t)]$ donc :

$$\begin{aligned} W'(t) &= \det[U'(t), V(t)] + \det[U(t), V'(t)] = \det[A(t)U(t), V(t)] + \det[U(t), A(t)V(t)] \\ &= \mathrm{tr}(A(t))\det(U(t), V(t)) = \mathrm{tr}(A(t))W(t) \end{aligned}$$

IV.D.2) Sachant $W(t_0) = \det(E(t_0)) = \det(I_2) = 1$, le résultat de (IV.D.1) implique : $\forall t \in \mathbb{R},\ W(t) = \exp\left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))\mathrm{d}s\right)$

Mais $E(t_0 + T) = B$ (voir IV.B.3), donc $W(t_0 + T) = \det(B) = \rho_1\rho_2$, donc $\rho_1\rho_2 = \exp\left(\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{tr}(A(s))\mathrm{d}s\right)$.

Enfin, par T-périodicité de $s \mapsto A(s)$, on a aussi : $\rho_1\rho_2 = \exp\left(\displaystyle\int_{0}^{T} \mathrm{tr}(A(s))\mathrm{d}s\right)$

V. Racines p-ièmes dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

V.A) L'égalité demandée est vraie si $k = 1$, car alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j}A^j = \lambda^0 A^0 = I_n$ donc $X_1 = X$.

Si elle est vraie au rang $k \geq 1$, alors :

$$\begin{pmatrix} A & X \\ 0_{1,n} & \lambda \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} A & X \\ 0_{1,n} & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^k & X_k \\ 0_{1,n} & \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & AX_k + \lambda^k X \\ 0_{1,n} & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}$$

et on a : $AX_k + \lambda^k X = A\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j}A^j\right)X + \lambda^k X = \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \lambda^{k-j}A^j\right)X = X_{k+1}$.

ce qui prouve la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

V.B.1) Si $a = \lambda$, alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j}a^j = p\lambda^{p-1} \neq 0$. On suppose donc $a \neq \lambda$, c'est-à-dire en fait $a^p \neq \lambda^p$.

Dans ces conditions $(a-\lambda)\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j}a^j\right) = a^p - \lambda^p \neq 0$, et là encore $\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j}a^j \neq 0$.

V.B.2) La matrice $Y = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j}A^j$ est elle-aussi triangulaire supérieure.

Ses coefficients diagonaux sont les $b_{i,i} = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j}a_{i,i}^j$, non nuls d'après V.B.1). Ainsi Y est inversible.

V.B.3) La propriété est vraie au rang 1. En effet (en identifiant une matrice 1×1 et son unique coefficient), pour tout $b \in \mathbb{C}^*$, il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $a^p = b$ (les quotients $a_{i,i}/a_{j,j}$ se réduisant ici au seul $a/a = 1 \notin \mathcal{V}_p$).

On se donne donc $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que la propriété est vraie au rang n.

On se donne aussi $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$. On écrit $B = \begin{pmatrix} B_n & X \\ 0_{1,n} & \alpha \end{pmatrix}$, avec $\begin{cases} B_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ b_{n+1,n+1} = \alpha \in \mathbb{C}^* \end{cases}$

Par hypothèse, il existe $A_n = (a_{i,j}) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ tel que $A_n^p = B_n$ et : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \dfrac{a_{i,i}}{a_{j,j}} \notin \mathcal{V}_p$.

On définit alors la matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} A_n & X' \\ 0_{1,n} & \lambda \end{pmatrix}$, avec $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $a_{n+1,n+1} = \lambda \in \mathbb{C}^*$.

On sait depuis (V.A) que $A^p = \begin{pmatrix} A_n^p & YX' \\ 0_{1,n} & \lambda^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_n & YX' \\ 0_{1,n} & \lambda^p \end{pmatrix}$, avec $Y = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j}A_n^j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On sait également depuis (V.B.2) que la matrice Y est inversible.

Dans ces conditions $A^p = B$ équivaut à $\lambda^p = \alpha$ (ce qui fait p possibilités) et $X' = Y^{-1}X$.

Ensuite il reste à s'assurer des conditions $(\lambda = a_{i,i})$ ou $(\lambda^p \neq a_{i,i}^p)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Tout dépend des coefficients diagonaux $b_{i,i} = a_{i,i}^p$ de la matrice initiale B, avec $i \in [\![1, n]\!]$.

- Pour les (éventuels) i de $[\![1, n]\!]$ tels que $b_{i,i} \neq \alpha$, tout choix λ pour $\lambda^p = \alpha$ vérifie $(\lambda^p = \alpha) \neq (a_{i,i}^p = b_{i,i})$.
- Il reste les (éventuels) i de $[\![1, n]\!]$ tels que $b_{i,i} = \alpha$. Mais pour ceux-là la valeur de $a_{i,i}$ est la même (ça fait partie de l'hypothèse de récurrence). Il suffit donc de choisir cette valeur commune pour λ.

On a donc prouvé la propriété au rang $n + 1$, ce qui achève la récurrence.

V.B.4) Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $B = QTQ^{-1}$.

On sait depuis (V.B.3) qu'il existe $V \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $V^p = T$.

Si on pose $A = QVQ^{-1}$, alors $A^p = QV^pQ^{-1} = QTQ^{-1} = B$, donc A est une racine p-ième de B.