

Concours commun polytechnique TSI 2000 - Mathématiques 2



1. Préliminaires

1.1.

$$\boxed{c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = a_0(f)}$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}}$$

De même,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}}$$

1.2. L'on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|c_n(f)| = \left| \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \right| \leq \frac{|a_n(f)| + |b_n(f)|}{2}$ et

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|c_{-n}(f)| = \left| \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} \right| \leq \frac{|a_n(f)| + |b_n(f)|}{2}$. Donc,

si $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ convergent absolument,
 $\sum c_n(f)$ et $\sum c_{-n}(f)$ sont aussi absolument convergentes.

Réciproquement,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \Rightarrow$
 $|a_n(f)| \leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$ et $|b_n(f)| \leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$. Donc,

si $\sum c_n(f)$ et $\sum c_{-n}(f)$ convergent absolument,
 $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ sont aussi absolument convergentes.

1.3. La série de Fourier de f ($S_F(f, x)$) s'écrit :

$$\begin{aligned} a_0(f) + \sum_{n \geq 1} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) &= \\ &= c_0(f) + \sum_{n \geq 1} (c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(nx) + i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \sin(nx) \\ &= c_0(f) + \sum_{n \geq 1} c_n(f) (\cos(nx) + i \sin(nx)) + c_{-n}(f) (\cos(nx) - i \sin(nx)) \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, S_F(f, x) = c_0(f) + \sum_{n \geq 1} c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx}}$$

2. Ici $E_{a,0}$ vaut $y'' + ay = 0$.

2.1. L'équation caractéristique est $r^2 + a = 0$ (*). Notons ses deux solutions r_1 et r_2 .

Comme $r_1 = -r_2$ et $r_1 r_2 = a$, si $\text{Re}(r_1) = 0$, $r_1 r_2 = -r_1^2 = \text{Im}(r_1)^2 \in \mathbb{R}^+$.

Si $a \notin \mathbb{R}^+$, l'on $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = -(\alpha + i\beta)$ avec $\alpha \neq 0$ et les solutions de $E_{a,0}$ sont de la forme :

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ avec λ et $\mu \in \mathbb{C}$. On a alors φ 2π -périodique $\Rightarrow \varphi = 0$ car si
 $x \rightarrow \lambda e^{(\alpha+i\beta)x} + \mu e^{-(\alpha+i\beta)x}$

$(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\varphi(x)| = +\infty$ et φ n'est pas 2π -périodique.

Les solutions de $E_{0,0}$ sont de la forme $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ avec λ et $\mu \in \mathbb{C}$. $E_{0,0}$ admet des solutions
 $x \rightarrow \lambda x + \mu$

non nulles 2π -périodique pour $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$.

Si $a \in \mathbb{R}^{+*}$, posons $\beta = \sqrt{a}$. Les solutions de $E_{a,0}$ sont de la forme :

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ avec λ et $\mu \in \mathbb{C}$ et sont de période $\frac{2\pi}{\beta}$. D'où 2π est une période de φ si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{N}, 2\pi = k \frac{2\pi}{\beta} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, \beta = k$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, a = k^2.$$

En résumé :

Donc $E_{a,0}$ admet des solutions non nulles 2π – périodiques $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, a = k^2$.

2.2. Si a est non réel, alors soit φ une solution réelle non nulle de $E_{a,0}$. Alors :

$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) + a\varphi(x) = 0$. Supposons $\varphi(x_0) \neq 0$. On a alors $\frac{\varphi''(x_0)}{\varphi(x_0)} = -a$; or $\frac{\varphi''(x_0)}{\varphi(x_0)} \in \mathbb{R}$ D'où apparaît une contradiction avec a réel.

Si a est réel, l'on sait que l'ensemble des solutions réelles de $E_{a,0}$ est un espace vectoriel de dimension 2 qui contient donc des solutions non nulles.

Donc :

$E_{a,0}$ admet des solutions réelles non nulles $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3.1. \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{[f(t) e^{-int}]_0^{2\pi}}_0 + in \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right) \quad (f \text{ et } t \rightarrow e^{-int} \text{ sont } C^1 \text{ sur } [0, 2\pi]) \\ &= \frac{in}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = in c_n(f)}$$

3.2. L'on en déduit par une récurrence simple :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}, c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)}$$

$$\begin{aligned} 3.3. \forall n \in \mathbb{N}^*, |c_n(f)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \left(\left[f(t) \frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t) \frac{e^{-int}}{-in} dt \right) \right| \quad (\text{intégrations par parties}) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\left| \frac{f(2\pi) - f(0)}{n} \right| + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} |f'(t)| dt \right) \end{aligned}$$

ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$. De même $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_{-n}(f) = 0$.

D'où $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}, c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} c_n(f) = \frac{1}{(in)^k} c_n(f^{(k)}) \\ c_{-n}(f) = \frac{1}{(-in)^k} c_{-n}(f^{(k)}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} |c_n(f)| = \frac{1}{n^k} |c_n(f^{(k)})| \\ |c_{-n}(f)| = \frac{1}{n^k} |c_{-n}(f^{(k)})| \end{cases} . \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(f^{(k)}) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} c_{-n}(f^{(k)}) = 0, \text{ on}$$

a :

$$\boxed{|c_n(f)| \text{ et } |c_{-n}(f)| \text{ sont négligeables devant } \frac{1}{n^k} \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.}$$

3.4. f étant C^∞ sur \mathbb{R} , l'on a pour k fixé dans \mathbb{N} , $|c_n(f^{(k)})|$ et $|c_{-n}(f^{(k)})|$ sont négligeables devant $\frac{1}{n^2}$ quand n tend vers $+\infty$ comme pour les $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$.

L'on a en outre :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |(c_n(f^{(k)})e^{inx} + c_{-n}(f^{(k)})e^{-inx})| \leq |c_n(f^{(k)})| + |c_{-n}(f^{(k)})|.$$

Comme les deux séries $\sum |c_n(f^{(k)})|$ et $\sum |c_{-n}(f^{(k)})|$ sont convergentes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $c_0(f^{(k)}) + \sum_{n \geq 1} (c_n(f^{(k)})e^{inx} + c_{-n}(f^{(k)})e^{-inx})$ est absolument convergente.

Si l'on dérive terme à terme le développement de $f^{(k)}$, on obtient la série :

$$\sum_{n \geq 1} (inc_n(f^{(k)})e^{inx} - inc_{-n}(f^{(k)})e^{-inx}) = \sum_{n \geq 1} (c_n(f^{(k+1)})e^{inx} + c_{-n}(f^{(k+1)})e^{-inx}).$$

En outre la formule $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}, c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$ montre que $\forall k \in \mathbb{N}^*, c_0(f^{(k)}) = 0$.
D'où :

Donc, en dérivant terme à terme la série de Fourier de $f^{(k)}$,
on a obtenu la série de fourier de $f^{(k+1)}$.

4.1. Par définition une solution φ de $E_{a,b}$ est 2 fois dérivable sur \mathbb{R} .

Supposons φ k fois dérivable ($k \geq 2$) (hypothèse de récurrence) et montrons φ $k+1$ fois dérivable.

L'on a $\varphi'' = -(a + be^{2ix})\varphi$. Or $x \rightarrow (a + be^{2ix})$ est C^∞ sur \mathbb{R} et φ est k fois dérivable sur \mathbb{R} : donc φ'' est k fois dérivable sur \mathbb{R} , ce qui prouve que φ est $k+2$ fois, donc $k+1$ fois dérivable sur \mathbb{R} .

Donc φ est indéfiniment dérivable.

4.2. Une solution réelle φ de $E_{a,b}$, 2π -périodique, est C^∞ sur \mathbb{R} . Ses dérivées sont donc elles aussi C^∞ et 2π -périodiques. Comme φ et ses dérivées sont 2π -périodiques, continues et C^1 par morceaux, elles sont développables en série de Fourier (théorème de Jordan-Dirichlet), c'est à dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \varphi^{(k)}(x) = c_0(\varphi^{(k)}) + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n(\varphi^{(k)})e^{inx} + c_{-n}(\varphi^{(k)})e^{-inx})}$$

4.3. g est alors continue et 2π -périodique.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a + be^{2it})f(t)e^{-int} dt \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{i(2-n)t} dt \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(g) = ac_n(f) + bc_{n-2}(f)}$$

4.4. Soit f solution de $E_{a,b}$, 2π -périodique.

On a alors $f'' + (a + be^{2ix})f = 0$, ce qui prouve :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f'') + c_n(g) = 0, \text{ en posant } g : x \rightarrow (a + be^{2ix})f(x).$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{Z}, (in)^2 c_n(f) + ac_n(f) + bc_{n-2}(f) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, (n^2 - a)c_n(f) = bc_{n-2}(f)}$$

5.1. D'après la question 4.4., $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 c_n(f) = bc_{n-2}(f)$. d'où :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{Z}, c_{2p+1}(f) = \frac{b}{(2p+1)^2} c_{2p-1}(f)}$$

Supposons $c_1(f) = 0$:

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, c_{2p+1}(f) = \frac{b}{(2p+1)^2} c_{2p-1}(f) = \dots = \frac{b^p}{(2p+1)^2 \dots 3^2} c_1(f) \text{ (récurrence simple)}$$

D'où $c_{2p+1}(f) = 0$. De même :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, c_{-2p+1}(f) = \frac{(-2p+1)^2}{b} c_{-2p+3}(f) = \dots = \frac{(-2p+1)^2 \dots 1^2}{b^p} c_1(f) \text{ (récurrence simple)}$$

D'où $c_{-2p+1}(f) = 0$.

On a montré : $\boxed{\forall p \in \mathbb{Z}, c_{2p+1}(f) = 0}$.

Supposons $c_1(f) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \forall p \in \mathbb{N}^*, c_{-2p+1}(f) &= \frac{(-2p+1)^2}{b} c_{-2p+3}(f) \\ &= \dots \\ &= \frac{(-2p+1)^2 \dots 1^2}{b^p} c_1(f) \text{ et } \lim_{p \rightarrow +\infty} |c_{-2p+1}(f)| = +\infty. \end{aligned}$$

Donc $\sum_{p \in \mathbb{N}} c_{-2p+1}(f)$ diverge et n'est donc pas absolument convergente.

5.2. D'après la question 4.4., $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 c_n(f) = b c_{n-2}(f)$. d'où pour $n = 0$, on obtient, comme $b \neq 0$, $c_{-2}(f) = 0$.

Supposons $c_{-2p}(f) = 0$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ fixé (hypothèse de récurrence).

On a alors $(-2p)^2 c_{-2p}(f) = b c_{-2(p+1)}(f)$. Comme $b \neq 0$, on déduit $c_{-2(p+1)}(f) = 0$.

D'où $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, c_{-2p}(f) = 0}$

5.3. En substituant $2p$ à n dans la relation démontrée en 4.4., on obtient :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, c_{2p}(f) = \frac{b}{4p^2} c_{2p-2}(f)}$$

6.1. Si $b = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = 0$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Si $b \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \right| = \frac{|b|}{4(n+1)^2}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc là encore :

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

6.2. Pour $z = 1$, la série précédente converge, d'où $\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n$ converge.

L'on sait que $\forall z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n z^n$ est absolument convergente. donc en substituant e^{2ix} à z , on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n e^{2inx}$ est absolument convergente.

$$6.3. \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n e^{2inx}.$$

En admettant que φ est C^2 sur \mathbb{R} et que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2in)^2 \gamma_n e^{2inx}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) + b e^{2ix} \varphi(x) &= - \sum_{n=0}^{+\infty} 4n^2 \gamma_n e^{2inx} + b e^{2ix} \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n e^{2inx} \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} 4n^2 \gamma_n e^{2inx} + b \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n e^{2i(n+1)x} \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} 4n^2 \gamma_n e^{2inx} + b \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_{n-1} e^{2inx} \text{ (translation d'indice)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-4n^2 \gamma_n + b \gamma_{n-1}) e^{2inx} \\ &= 0 \text{ (par définition des } \gamma_n) \end{aligned}$$

Donc φ est solution de $E_{0,b}$. φ est 2π -périodique (les $x \rightarrow e^{2inx}$ le sont). En outre :

