CONCOURS COMMUN MINES, PONTS,.. 1975

OPTIONS M ET P' - EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 2 HEURES)

- Indications préliminaires -

I - Le candidat indiquera, en tête de sa copie, le titre et le nom de l'auteur des tables numériques utilisées.

II - Dans l'énoncé du problème, la notation Log désigne le logarithme népérien.

III - On rappelle que la valeur décimale approchée à 10^{-p} près par défaut (p étant un entier positif) d'un nombre réel x est le nombre décimal $\frac{n}{10^p}$ tel que

$$\frac{n}{10^p} \leqslant x < \frac{n+1}{10^p}$$

(n étant un entier positif, nul ou négatif).

- - - - - - -

Problème

1°) On désigne par x une variable réelle, et par Δ le domaine de définition de la fonction à valeurs réelles, notée f, telle que

$$f(x) = \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{x + \sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que Δ est la réunion des deux intervalles

$$[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\quad \text{et} \quad]-\frac{1}{\sqrt{2}}, +1]$$

qui seront notés respectivement Δ_1 et Δ_2.

Dans quel domaine Δ' la fonction f admet-elle des dérivées première et seconde, f' et f" ? Donner les expressions de f' (x) et de f" (x) pour $x \in \Delta'$.

2°) Etudier les variations de f (x) lorsque x décrit Δ.
On désigne par C la courbe ayant pour équation cartésienne

$$y = f(x)$$

dans un plan rapporté à un repère orthonormé (origine O, axes $\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$). Indiquer sommairement l'allure de la courbe C, après avoir construit les tangentes à C aux points ayant pour abscisses : -1 ; 0 ; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1.

3°) Montrer que l'équation

$$f''(x) = 0$$

admet deux racines, α et β, vérifiant les inégalités

$$-1 < \alpha < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad 0 < \beta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donner les expressions numériques (faisant intervenir des radicaux) des six nombres :
α ; β ; $f(\alpha)$; $f(\beta)$; $f'(\alpha)$; $f'(\beta)$.

[On pourra remarquer que les nombres : $\alpha^2 \beta^2$; $f(\alpha) + f(\beta)$; $\frac{f'(\alpha)}{\alpha f(\alpha)}$; $\frac{f'(\beta)}{\beta f(\beta)}$ sont des rationnels très simples.]

4°) Calculer la valeur approchée à 10^{-4} près par défaut de chacun des quatre nombres :

$$f(\alpha) \; ; \; \alpha \; ; \; f(\beta) \; ; \; \beta \; ;$$

et la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut des nombres $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$.

Indiquer brièvement, sans reprendre le tracé de la courbe C, comment les résultats précédents permettraient de préciser le tracé.

5°) La fonction f admet des primitives dans chacun des intervalles Δ_1 et Δ_2 dont la réunion forme le domaine Δ ,, On désigne par F la fonction, définie dans Δ, vérifiant les deux conditions :

- dans Δ_1, F est la primitive de f telle que $F(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} (\sqrt{2} + 1)$;
- dans Δ_2, F est la primitive de f telle que $F(+1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} (\sqrt{2} + 1)$.

On demande de calculer $F(x)$, pour $x \in \Delta$.

On utilisera, pour ce calcul, le changement de variable :

$$x = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{avec} \quad -\frac{3\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \theta \neq -\frac{\pi}{2} \; ;$$

mais on donnera, en définitive, l'expression de $F(x)$ en fonction de la seule variable x.

Donner les expressions numériques (faisant intervenir des radicaux et des logarithmes) des nombres

$$F(0) \; ; \; F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \; ; \; F(\alpha) \; ; \; F(\beta).$$

6°) On considère les quatre nombres

$$I = \int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx \; ; \quad J = \int_{0}^{\beta} f(x)\,dx \; ; \quad K = \int_{\beta}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)\,dx \; ; \quad L = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} f(x)\,dx.$$

Quels sont les signes de ces nombres ?

Calculer une valeur décimale approchée de chacun de ces quatre nombres, en précisant pour chacune de ces valeurs la marge d'incertitude correspondante, compte tenu des tables numériques utilisées.

7°) Les intégrales

$$\int_{\alpha}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} f(x)\,dx$$

sont-elles convergentes ?