

CENTRALE-SUPÉLEC 2008 - PSI - ÉPREUVE 1

Question préliminaire

On reconnaît l'algorithme d'exponentiation rapide, donc $f(a, b) = a^b$.

Preuve : Tout d'abord, l'algorithme "termine" puisque les valeurs prises par la variable k forment une suite strictement décroissante d'entiers naturels, on aura donc nécessairement $k = 0$ après un nombre fini d'étapes, ce qui termine la boucle.

Enfin, on note que l'expression $i j^k$ est un invariant de la boucle puisque, selon la parité de k , elle est transformée en $(ij) j^{k-1}$ ou en $i (j^2)^{\frac{k}{2}}$, soit toujours $i j^k$; avant le départ de la boucle, on a $i j^k = 1 \times a^b = a^b$, donc à la fin de la boucle, on a $i = i j^k$ (puisque $k = 0$), donc la fonction retourne $i = a^b$.

Partie I. Récurrence en dimension 1

I.A. $u := \text{proc}(n)$ local x, k :

$x := u0$;

for k from 1 to n do

$x := a * x + b$

od;

x

end;

I.B. On a $v_{n+1} = a u_n + k + b$, donc $v_{n+1} = a v_n \iff ak = b + k \iff k = \frac{b}{a-1}$.

I.C. La suite v est géométrique de raison a , de premier terme $v_0 = u_0 + \frac{b}{a-1}$.

Donc $v_n = a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right)$, puis

$$u_n = a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1}.$$

I.D. • Si $u_0 = \frac{b}{1-a}$, alors la suite u est constante de valeur $\frac{b}{1-a}$, donc la série entière S a pour rayon de convergence $\rho = 1$ (sauf si $b = 0$, auquel cas $u_n = 0$ et $\rho = +\infty$).

• Si $u_0 \neq \frac{b}{1-a}$, alors

- si $|a| > 1$, on a $|u_n| \sim K |a|^n$ avec $K = \left| u_0 + \frac{b}{a-1} \right| > 0$, donc $\rho = \frac{1}{|a|}$;

- si $|a| < 1$ et $b \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{b}{1-a} \neq 0$, d'où $\rho = 1$;

- si $|a| < 1$ et $b = 0$, alors $u_n = u_0 a^n$ avec $u_0 \neq 0$, et $\rho = \frac{1}{|a|}$;

- si $a = -1$, comme $(u_0, b) \neq (0, 0)$, la suite (u_n) prend exactement deux valeurs distinctes (donc au moins une est non nulle) et $\rho = 1$.

On observe que $\rho_S = \min \left\{ 1, \frac{1}{|a|} \right\} = \frac{1}{\max\{1, |a|\}}$.

I.E. Dans tous les cas, on a $\rho_S \leq 1$, donc $|z| < \rho_S \implies |z| < 1$: on est donc assuré de la convergence de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Par ailleurs, si $|z| < \rho_S$ et

$z \neq 0$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n = \frac{S(z) - u_0}{z}$. Pour $|z| < \rho_S$ et $z \neq 0$, on a donc

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - au_n - b) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} z^n - a \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n - b \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \\
&= \frac{S(z) - u_0}{z} - a S(z) - \frac{b}{1-z} .
\end{aligned}$$

En remultipliant par z , on obtient l'équation, valable pour tout z tel que $|z| < \rho_S$:

$$(1 - az) S(z) - u_0 - \frac{bz}{1-z} = 0 ,$$

$$\text{d'où finalement } S(z) = u_0 \frac{1}{1-az} + b \frac{z}{(1-z)(1-az)} .$$

I.F. On a $\rho_G = +\infty$: en effet, les coefficients u_n ont une croissance géométrique, c'est-à-dire il existe une majoration de la forme $|u_n| \leq M K^n$ avec $M > 0$ et $K > 0$ et la série entière (exponentielle) $\sum_{n \geq 0} \frac{MK^n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini, on conclut par comparaison.

La suite est du cours.

I.G. Pour tout x réel (les séries entières entrant en jeu ont toutes pour rayon de convergence $+\infty$), on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - au_n - b) \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} \frac{x^n}{n!} - a \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^n}{n!} - b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= G'(x) - a G(x) - b e^x .
\end{aligned}$$

La fonction G est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - ay = b e^x$, d'où une expression de la forme $y = C e^{ax} + \frac{b}{1-a} e^x$. On dispose enfin de la condition initiale $y(0) = G(0) = u_0$, d'où finalement

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = u_0 e^{ax} + b \frac{e^x - e^{ax}}{1-a} .$$

I.H. On a aussi $u_n = G^{(n)}(0)$. Or, $G^{(n)}(x) = a^n u_0 e^{ax} + b \frac{e^x - a^n e^{ax}}{1-a}$. On obtient donc

$$u_n = a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1}$$

et on est content. Pour programmer le calcul de u_n , on peut (bêtement) écrire la procédure

```

U:=proc(n):
  a^n*(u0-b/(1-a))+b/(1-a)
end:

```

ce qui nécessite le calcul de a^n . Si ce calcul est fait "naïvement" par le logiciel de calcul formel dont vous disposez (ce qui m'étonnerait), le temps de calcul est de l'ordre de n ce qui n'est pas mieux que la procédure du **I.A.** On peut obtenir un programme plus rapide (temps de calcul en $O(\log_2(n))$) en calculant a^n par l'algorithme d'exponentiation rapide présenté en préliminaire.

Partie II. Récurrence en dimension 2

II.A. Il résulte des hypothèses que la matrice M est diagonalisable, et est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. On a donc $M = PDP^{-1}$, où P est une matrice inversible. On a les relations

$$\begin{cases} \text{Tr}(M) = \text{Tr}(D) \\ \det(M) = \det(D) \end{cases} \iff \begin{cases} a + d = \lambda + \mu \\ ad - bc = \lambda\mu \end{cases}$$

qui permettent d'obtenir c et d en fonction de a , b , λ et μ , on obtient $d = \lambda + \mu - a$, puis $c = \frac{ad - \lambda\mu}{b} = \frac{a\lambda + a\mu - a^2 - \lambda\mu}{b}$. Le système (7) se réécrit alors de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a\lambda + a\mu - a^2 - \lambda\mu}{b} & \lambda + \mu - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (7')$$

Explicitons la matrice de passage P et son inverse. En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système $MX = \lambda X$ est de rang 1 (puisque λ est valeur propre simple par hypothèse) et équivaut donc à une seule équation, par exemple $ax + by = \lambda x$, soit $(a - \lambda)x + by = 0$: le sous-espace propre $E_\lambda(M)$ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$. De même, le sous-espace propre $E_\mu(M)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} b \\ \mu - a \end{pmatrix}$.

Une matrice de passage P possible est donc $P = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda - a & \mu - a \end{pmatrix}$. On a ensuite

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t(\text{Com}P) = \frac{1}{b(\mu - \lambda)} \begin{pmatrix} \mu - a & -b \\ a - \lambda & b \end{pmatrix}.$$

En posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, on a $U_{n+1} = MU_n$, donc $U_n = M^n U_0 = (PDP^{-1})^n U_0 = P D^n P^{-1} U_0$. Tous calculs faits, on obtient l'expression "simple" suivante :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{b(\mu - \lambda)} \begin{pmatrix} b(\mu - a)\lambda^n - b(\lambda - a)\mu^n & b^2(\mu^n - \lambda^n) \\ (\lambda - a)(\mu - a)(\lambda^n - \mu^n) & b\mu^n(\mu - a) - b\lambda^n(\lambda - a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

II.B. Parlons tout de suite des rayons de convergence : de la question **II.A.**, il résulte que $u_n = A\lambda^n + B\mu^n$, où A et B sont des constantes. En posant $R = \max\{|\lambda|, |\mu|\}$ (rayon spectral de la matrice M), on a donc une majoration de la forme $|u_n| \leq K R^n$ où K est

un réel strictement positif. Le rayon de convergence de la série entière S est alors au moins égal à $\frac{1}{R}$. Même chose pour le rayon de convergence de la série entière T . On peut donc choisir $\rho = \frac{1}{R} = \frac{1}{\max\{|\lambda|, |\mu|\}}$.

Pour $|z| < \rho$ et $z \neq 0$, un calcul analogue à celui de la question **I.E.** conduit aux équations

$$\frac{S(z) - u_0}{z} - a S(z) - b T(z) = 0 \quad ; \quad \frac{T(z) - v_0}{z} - c S(z) - d T(z) = 0 ,$$

c'est-à-dire au système linéaire $\begin{cases} (1 - az) S(z) - bz T(z) = u_0 \\ -cz S(z) + (1 - dz) T(z) = v_0 \end{cases}$. Le déterminant de ce système est

$$D(z) = \begin{vmatrix} 1 - az & -bz \\ -cz & 1 - dz \end{vmatrix} = 1 - (a + d)z + (ad - bc)z^2 = (1 - \lambda z)(1 - \mu z)$$

qui est non nul pour $|z| < \rho = \min\left\{\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{|\mu|}\right\}$. La résolution par les formules de Cramer donne

$$S(z) = \frac{1 - dz}{D(z)} u_0 + \frac{bz}{D(z)} v_0 \quad ; \quad T(z) = \frac{cz}{D(z)} u_0 + \frac{1 - az}{D(z)} v_0 .$$

II.C. Puisqu'il existe une majoration de la forme $|u_n| \leq K R^n$, on déduit comme en **I.F.** que la série entière G a un rayon de convergence infini, même chose pour H .

II.D. Les fonctions G et H sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme (cours sur les séries entières). Les relations évidentes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - a u_n - b v_n) \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - c u_n - d v_n) \frac{x^n}{n!} = 0$$

conduisent au système différentiel linéaire

$$\begin{cases} G'(x) = a G(x) + b H(x) & \text{(1)} \\ H'(x) = c G(x) + d H(x) & \text{(2)} \end{cases} , \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} G' \\ H' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} .$$

II.E. On bidouille : la combinaison linéaire $d \times \text{(1)} - b \times \text{(2)}$ donne la relation

$$d G'(x) - b H'(x) = (ad - bc) G(x) = \lambda \mu G(x) .$$

Par ailleurs, en dérivant **(1)**, on obtient

$$G''' = a G' + b H' = a G' + [d G' - (d G' - b H')] = (a + d) G' - \lambda \mu G = (\lambda + \mu) G' - \lambda \mu G .$$

Calcul et résultat analogues pour H . Les fonctions G et H sont donc solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y'' - (\lambda + \mu) y' + \lambda \mu y = 0 . \quad \text{(E)}$$

La famille (G, H) est un système fondamental de solutions de **(E)** si et seulement si leur wronskien $W = GH' - G'H$ est non nul, soit encore si et seulement si $W(0) \neq 0$, donc si

et seulement si $u_1 v_0 - u_0 v_1 \neq 0$. Comme $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, cette condition s'écrit finalement

$$(a - d) u_0 v_0 - c u_0^2 + b v_0^2 \neq 0 .$$

II.F. L'équation caractéristique de **(E)** est $(r - \lambda)(r - \mu) = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$, les solutions de **(E)** sont les combinaisons linéaires de $x \mapsto e^{\lambda x}$ et de $x \mapsto e^{\mu x}$. On a donc $G(x) = A e^{\lambda x} + B e^{\mu x}$ et $H(x) = C e^{\lambda x} + D e^{\mu x}$, où A, B, C, D sont des constantes. Les conditions initiales $\begin{cases} G(0) = u_0 \\ G'(0) = u_1 \end{cases}$ et $\begin{cases} H(0) = v_0 \\ H'(0) = v_1 \end{cases}$ donnent, en tenant compte aussi des relations $u_1 = a u_0 + b v_0$ et $v_1 = c u_0 + d v_0$,

$$\begin{aligned} G(x) &= u_0 \frac{(\mu - a) e^{\lambda x} - (\lambda - a) e^{\mu x}}{\mu - \lambda} + v_0 \frac{b (e^{\mu x} - e^{\lambda x})}{\mu - \lambda} . \\ H(x) &= u_0 \frac{c (e^{\mu x} - e^{\lambda x})}{\mu - \lambda} + v_0 \frac{(\mu - d) e^{\lambda x} - (\lambda - d) e^{\mu x}}{\mu - \lambda} . \end{aligned}$$

Partie III. Transformation de Laplace

III.A. Si f est CDI(α), notons M un majorant de $|f(t)| e^{-\alpha t}$ pour t décrivant $\mathbb{R}_+$. Soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(p) > \alpha$, on a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|f(t) e^{-pt}| = |f(t)| e^{-\operatorname{Re}(p) t} = |f(t)| e^{-\alpha t} e^{-(\operatorname{Re}(p) - \alpha) t} \leq M e^{-(\operatorname{Re}(p) - \alpha) t} ,$$

la fonction $t \mapsto e^{-(\operatorname{Re}(p) - \alpha) t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto f(t) e^{-pt}$ et donc la convergence de l'intégrale impropre $\operatorname{Lap}(f)(p)$.

III.B. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit p un nombre complexe tel que $\operatorname{Re}(p) > \alpha$. Une intégration par parties donne

$$\int_0^x f'(t) e^{-pt} dt = \left[f(t) e^{-pt} \right]_0^x + p \int_0^x f(t) e^{-pt} dt . \quad (*)$$

De **III.A.** ci-dessus, il résulte que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) e^{-px} = 0$ et aussi que l'intégrale impropre

$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ est convergente, le second membre de l'égalité **(*)** a donc une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit que l'intégrale impropre $\operatorname{Lap}(f')(p)$ converge et l'égalité

$$\operatorname{Lap}(f')(p) = p \cdot \operatorname{Lap}(f)(p) - f(0) .$$

III.C. En admettant tout... on a

$$\operatorname{Lap}(G)(p) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \right) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt .$$

Par ailleurs, en posant $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt$ (ces intégrales impropres sont bien convergentes

dès que $\operatorname{Re} p > 0$), une intégration par parties donne la relation de récurrence $I_n = \frac{n}{p} I_{n-1}$

pour $n \geq 1$, donc $I_n = \frac{n!}{p^{n+1}}$. Finalement,

$$\text{Lap}(G)(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{p^{n+1}} = \frac{1}{p} S\left(\frac{1}{p}\right).$$

Remarque. La condition $\text{Re } p > 0$ ne suffit pas à justifier la convergence des séries et intégrales entrant en jeu dans ce calcul. Par contre, si l'on suppose $\text{Re}(p) > \frac{1}{\rho}$, où ρ est le rayon de convergence de la série entière S , alors les intégrales rencontrées existent et l'interversion série-intégrale se justifie facilement à l'aide du théorème d'intégration terme à terme figurant au programme de PSI.

III.D. On a l'équation différentielle $G'(x) - a G(x) = b e^x$. La linéarité (évidente) de la transformation de Laplace donne

$$\text{Lap}(G')(p) - a \cdot \text{Lap}(G)(p) = b \cdot \text{Lap}(\exp)(p).$$

Or, $\text{Lap}(\exp)(p) = \int_0^{+\infty} e^{(1-p)t} dt = \frac{1}{p-1}$ si $\text{Re}(p) > 1$. On obtient donc, en utilisant **III.B.** :

$$(p-a) \cdot \text{Lap}(G)(p) - G(0) = \frac{b}{p-1},$$

soit, avec les résultats de **III.C.** : $S\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p}{p-a} \left(u_0 + \frac{b}{p-1}\right)$. En posant $x = \frac{1}{p}$ avec p réel dans $]1, +\infty[$, on obtient, pour $x \in]0, 1[$ en tout cas, la relation

$$S(x) = \frac{1}{1-ax} \left(\frac{bx}{1-x} + u_0 \right),$$

ce qui est la même expression qu'en **I.E.**

Partie IV. Une récurrence explosive

IV.A.1. Cet encadrement résulte des inégalités

$$u^2 + v^2 - 2uv = (u-v)^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad u^2 + v^2 + 2uv = (u+v)^2 \geq 0.$$

IV.A.2. Posons $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. On a alors $U_{n+1} = M_n U_n$, avec $M_n = \begin{pmatrix} an & b \\ c & dn \end{pmatrix}$. Or,

$\det(M_n) = adn^2 - bc \neq 0$ puisque $\frac{bc}{ad}$ n'est pas le carré d'un entier. La matrice M_n est donc inversible pour tout entier naturel n et, de $U_0 \neq 0$, on déduit $U_n \neq 0$ pour tout n , donc $\omega(n) = \|U_n\|^2 > 0$.

On calcule

$$\begin{aligned} \omega(n+1) &= u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = (anu_n + bv_n)^2 + (cu_n + dnv_n)^2 \\ &= n^2 (a^2 u_n^2 + d^2 v_n^2) + 2(ab + cd) n u_n v_n + b^2 v_n^2 + c^2 u_n^2. \end{aligned}$$

Comme $2|u_n v_n| \leq u_n^2 + v_n^2 = \omega(n)$, on peut majorer, en posant $A = \max\{a^2, d^2\}$ et $B = \max\{b^2, c^2\}$:

$$\omega(n+1) \leq A n^2 \omega(n) + |ab + cd| n \omega(n) + B \omega(n),$$

donc $\frac{\omega(n+1)}{n^2 \omega(n)} \leq \beta(n)$, avec $\beta(n) = A + \frac{|ab+cd|}{n} + \frac{B}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$.

De même, $\omega(n+1) \geq C n^2 \omega(n) - |ab+cd| n \omega(n) + D \omega(n)$, avec $C = \min\{a^2, d^2\}$ et $D = \min\{b^2, c^2\}$, donc $\frac{\omega(n+1)}{n^2 \omega(n)} \geq \alpha(n)$, avec $\alpha(n) = C - \frac{|ab+cd|}{n} + \frac{D}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} C > 0$.

IV.B.1. Notons ρ_S et ρ_T les rayons de convergence respectifs des séries entières S et T . On a $v_n = \frac{1}{b}(u_{n+1} - a n u_n)$, donc, si $|z| < \rho_S$, les séries $\sum_{n \geq 0} u_{n+1} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} n u_n z^n$ (qui ont le même rayon de convergence, c'est classique) convergent, d'où la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} v_n z^n$: on en déduit que $\rho_T \geq \rho_S$. De même, de la relation $u_n = \frac{1}{c}(v_{n+1} - d n v_n)$, on déduit $\rho_S \geq \rho_T$. Finalement, $\rho_S = \rho_T$.

Posons $r(n) = \sqrt{\omega(n)} = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$. Alors, pour n assez grand (dès que $\alpha(n) > 0$), on a

$$n \sqrt{\alpha(n)} \leq \frac{r(n+1)}{r(n)} \leq n \sqrt{\beta(n)}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sqrt{\alpha(n)} = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r(n+1)}{r(n)} = +\infty$ et, par la règle de d'Alembert, on déduit que la série entière $\sum_{n \geq 0} r(n) z^n$ a un rayon de convergence nul. De l'inégalité

$r(n) = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \leq |u_n| + |v_n|$, on déduit que la série entière $\sum_{n \geq 0} (|u_n| + |v_n|) z^n$ a aussi

un rayon de convergence nul, mais cette dernière série entière a un rayon de convergence au moins égal au minimum des rayons de convergence des séries entières S et T , donc $0 \geq \min\{\rho_S, \rho_T\} = \rho_S = \rho_T$, et finalement $\rho_S = \rho_T = 0$.

IV.B.2. De la même façon que ci-dessus, de $\frac{v_n}{n!} = \frac{1}{b} \left((n+1) \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} - a n \frac{u_n}{n!} \right)$, on déduit $\rho_H \geq \rho_G$, puis finalement $\rho_G = \rho_H$. Posons $\rho = \rho_G = \rho_H$.

On a $\frac{|u_n|}{n!} \leq \frac{r(n)}{n!} \leq \frac{|u_n| + |v_n|}{n!}$, et les séries entières $\sum_{n \geq 0} \frac{|u_n|}{n!} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{|u_n| + |v_n|}{n!} z^n$ ont toutes deux pour rayon de convergence ρ (raisonnement analogue à la question précédente) donc, par encadrement, la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{r(n)}{n!} z^n$ a aussi pour rayon de convergence ρ .

Mais, en posant $w_n = \frac{r(n)}{n!}$, on a $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{r(n+1)}{(n+1) r(n)} \leq \sqrt{\beta(n)}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\beta(n)} = \sqrt{A} = \max\{|a|, |d|\}$. On en déduit (facilement) que la série entière $\sum_{n \geq 0} w_n z^n$ a un rayon

de convergence au moins égal à $\frac{1}{\max\{|a|, |d|\}}$, d'où la conclusion.

IV.C. Supposons $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$q_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{(n+1) v_{n+1}} = \frac{a n u_n + b v_n}{(n+1) (c u_n + d n v_n)} = \frac{a n^2 q_n + b}{n(n+1) (c q_n + d)}.$$

Donc $q_{n+1} = \varphi_n(q_n)$, avec $\varphi_n(x) = \frac{a n^2 x + b}{n(n+1)(cx+d)}$.

IV.D. q:=proc(q1,eps):

 x:=evalf(q1): n:=1:

 y:=(a*x+b)/2/(c*x+d):

 while abs(x-y)>eps do

 print(x):

 n:=n+1:

 x:=y:

 y:=(a*n^2*x+b)/n/(n+1)/(c*x+d)

 od

end:

IV.E. Dans $] -r, r[$, avec $r = \frac{1}{\max\{|a|, |d|\}}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} n u_n \frac{x^n}{n!} = x \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x G'(x)$. Les relations évidentes proposées par l'énoncé conduisent, dans $] -r, r[$, au système différentiel

$$\left\{ (1-ax) G'(x) = b H(x) \quad ; \quad (1-dx) H'(x) = c G(x) \right\}.$$

IV.F. En redérivant la première relation, on obtient

$$-a G'(x) + (1-ax) G''(x) = b H'(x) = \frac{bc}{1-dx} G(x).$$

La fonction G est donc solution sur $] -r, r[$ de l'équation différentielle

$$(1-ax)(1-dx) y'' - a(1-dx) y' - bc y = 0. \quad (\mathbf{E})$$

On montre de même que H est solution sur $] -r, r[$ de l'équation différentielle

$$(1-ax)(1-dx) y'' - d(1-ax) y' - bc y = 0.$$

IV.G. Supposons que l'équation différentielle **(E)** admette une solution polynomiale y de degré n exactement, avec $n \in \mathbb{N}$, soit $y = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$ avec $\alpha_n \neq 0$. L'examen du coefficient de x^n

dans l'équation **(E)** conduit à la relation $n(n-1)ad + nad - bc = 0$, soit $\frac{bc}{ad} = n^2$, donc le réel $\frac{bc}{ad}$ est le carré d'un nombre entier.

Supposons réciproquement $\frac{bc}{ad} = n^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons alors l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\Phi : P \mapsto \Phi(P) = (1-aX)(1-dX) P'' - a(1-dX) P' - bc P$.

C'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (la linéarité est immédiate et on a clairement $\deg(\Phi(P)) \leq \deg(P)$ pour tout polynôme P). On vérifie que le polynôme $\Phi(X^n)$ est de degré au plus $n-1$ (son coefficient de X^n est $n^2 ad - bc = 0$), on en déduit que $\text{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$: l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas surjectif, donc n'est pas injectif (dimension finie), il existe donc une solution de l'équation différentielle **(E)** qui est une fonction polynomiale non nulle de degré au plus n .