

1.a) On a immédiatement :

Conclusion: $p_{0,2}(t) = (1-t)^2$, $p_{1,2}(t) = 2t(1-t)$, $p_{2,2}(t) = t^2$

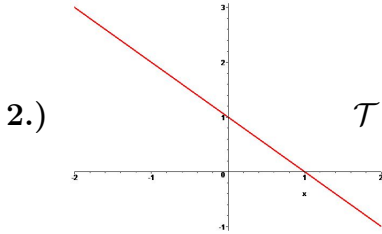
1.b) $A(t) = (1-t) \cdot (0,1) + t \cdot (1,1) = (t,1)$ on fait de même pour $B(t)$.

Enfin, $C(t) = (1-t) \cdot (t,1) + t \cdot (1,1-t) = (2t-t^2, 1-t^2)$.

Conclusion: $A(t) = (t,1)$, $B(t) = (1,1-t)$ et $C(t) = (1-t) \cdot (t,1) + t \cdot (1,1-t) = (2t-t^2, 1-t^2)$

1.c) $\sum_{k=0}^2 p_{k,2}(t)A_k = (1-t)^2(0,1) + 2t(1-t)(1,1) + t^2(1,0) = (2t-t^2, 1-t^2) = C(t)$.

Conclusion: $\sum_{k=0}^2 p_{k,2}(t)A_k = C(t)$



$\forall (M(x,y), N(x',y')) \in \mathcal{T}$, $\forall t \in [0,1] : tM + (1-t)N = (x'',y'')$ avec $x'' = (1-t)x + tx'$ et $y'' = (1-t)y + ty'$.

On a donc $x'' + y'' = (1-t)x + tx' + (1-t)y + ty' = (1-t)(x+y) + t(x'+y') \geq (1-t) \cdot 1 + t \cdot 1 = 1$

Donc $tM + (1-t)N \in \mathcal{T}$ Conclusion: $\mathcal{T}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$

3.a) $\forall t \in [0,1] : 2t - t^2 + 1 - t^2 - 1 = -2t^2 + 2t = 2t(1-t) \geq 0$

Conclusion: $\forall t \in [0,1] : C(t) \in \mathcal{T}$

3.b) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\forall t \in [0,1] : f'(t) = (2-2t, -2t) = 2(1-t, -t)$.

Enfin $f'(t) = (0,0) \implies 1-t=t=0$: impossible et donc $\forall t \in [0,1]$, $f'(t) \neq \vec{0}$.

Conclusion: $(1-t, -t)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_t$ à $\mathcal{C}$ en $C(t)$

3.c) $\forall t \in [0,1]$, l'équation de la tangente $\mathcal{D}_t$ à $\mathcal{C}$ en $C(t)$ est : $\begin{vmatrix} x - (2t - t^2) & 1 - t \\ y - (1 - t^2) & -t \end{vmatrix} = 0$,

donc $\mathcal{D}_t / -tx + (t-1)y + t^2 - t + 1 = 0$

On vérifie que les coordonnées de $A(t)$ et $B(t)$ vérifient l'équation ci-dessus.

Donc $(A(t), B(t)) \in \mathcal{D}_t^2$ et comme la droite $\mathcal{D}_t$ est convexe, on conclut

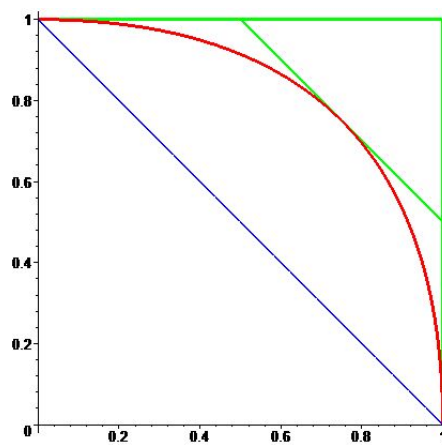
Conclusion: $[A(t), B(t)]$ est inclus dans $\mathcal{D}_t$

3.d)

Posons $x(t) = 2t - t^2$ et $y(t) = 1 - t^2$, on a $x'(t) = 2 - 2t$ et $y'(t) = -2t$

d'où le tableau de variation :

t	0		1
x'	0	+	
y'		-	0
x	0		1
y	1		0



La courbe rouge, c'est le support de l'arc $\mathcal{C}$, le trait bleu c'est la frontière de $\mathcal{T}$ et les 3 traits verts ce sont les 3 segments $[A(t), B(t)]$.

4.a) $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(\lambda P + Q)(X) = nX(\lambda P + Q)(X) + X(1 - X)(\lambda P + Q)'(X) = \lambda(nXP(X) + X(1 - X)P'(X)) + nXQ(X) + X(1 - X)Q'(X) = \lambda\varphi_n(P)(X) + \varphi_n(Q)(X)$

De même, $B_n(\lambda P + Q)(X) = \lambda B_n(P)(X) + B_n(Q)(X)$

D'autre part $d^o(B_n(P)) \leq n$, donc $B_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Enfin, si $P = a_n X^n + \dots + a_0$, $\varphi_n(P)(X) = nX(a_n X^n + \dots + a_0) + X(1 - X)(na_n X^{n-1} + \dots + a_1)$, d'où le terme en X^{n+1} s'annule et donc $d^o(\varphi_n(P)(X)) \leq n$, donc $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Conclusion: φ_n et B_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$

4.b)

Pour $k = 0$, $\varphi_n(p_{0,n})(X) = nX(1 - X)^n - X(1 - X)n(1 - X)^{n-1} = 0 = \underline{0}p_{0,n}(X)$.

Pour $k = n$, $\varphi_n(p_{n,n})(X) = nXX^n + X(1 - X)nX^{n-1} = nX^{n+1} + nX^n - nX^{n+1} = nX^n = \underline{n}p_{n,n}(X)$.

Pour $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \varphi_n(p_{k,n})(X) &= nX \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} + X(1 - X) \binom{n}{k} [kX^{k-1} (1 - X)^{n-k} - X^k (n - k) (1 - X)^{n-k-1}] \\ &= n \binom{n}{k} X^{k+1} (1 - X)^{n-k} + \binom{n}{k} [kX^k (1 - X)^{n-k+1} - X^{k+1} (n - k) (1 - X)^{n-k}] \\ &= \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} [nX + k(1 - X) - (n - k)X] = \underline{k} p_{k,n}(X). \end{aligned}$$

Conclusion: $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi_n(p_{k,n})(X) = k p_{k,n}$

4.c)

Par le théorème fondamental de liberté des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes (ici $0, 1, \dots, n$), les vecteurs $(p_{0,n}(X), \dots, p_{n,n}(X)) = \mathcal{F}$ est une famille libre. Comme cette famille a $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, on peut conclure que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que φ_n admet une base de vecteurs propres donc il est diagonalisable.

Conclusion: $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et φ_n est diagonalisable

4.d)

Comme 0 est valeur propre de φ_n celui-ci n'est donc pas bijectif.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $B_n(P)(X) = 0$, comme $(p_{0,n}(X), \dots, p_{n,n}(X))$ est libre, on doit avoir :

$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(\frac{k}{n}) = 0$. P devrait avoir au moins $n+1$ racines or $\deg P \leq n$ donc $P = 0$ et comme

on est en dimension finie, B_n est un endomorphisme bijectif.

Conclusion: φ_n n'est pas bijectif et B_n est bijectif

5.a) (*Question de cours*) Le tirage avec remise de r boules dans une urne qui contient une proportion de t boules blanches (succès) et de $1-t$ boules noires (échec). Si on s'intéresse à X le nombre de boules blanches obtenues, on a $X \sim \mathcal{B}(r, t)$

5.b) $T_r(\Omega) = \llbracket 0, r \rrbracket$ et si $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, $\binom{r}{k}$ est le choix des k succès dans le tirage avec remise des r boules, t^k est le produit (indépendance car on fait un tirage avec remise) des probabilités des k succès et $(1-t)^{n-k}$ est le produit (indépendance car on fait un tirage avec remise) des probabilités des $n-k$ échecs.

Conclusion: $\forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, $\mathbf{P}(T_r = k) = p_{k,r}(t)$

5.c) (*Question de cours*) $\mathbf{E}(T_r) = rt$, $\mathbf{V}(T_r) = rt(1-t)$, puis par linéarité de l'espérance et la formule $V(aX+b) = a^2V(X)$, on en déduit

$$\mathbf{E}(\overline{T_r}) = t, \quad \mathbf{V}(\overline{T_r}) = \frac{t(1-t)}{r}$$

Par la formule de König-Huygens, on a enfin $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X)^2$, donc

$$\mathbf{E}(T_r^2) = rt(1-t) + (rt)^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\overline{T_r}^2) = \frac{rt(1-t) + (rt)^2}{r^2} = \frac{t}{r} + \frac{t^2}{r}(r-1),$$

$$\mathbf{5.d)} \quad \sum_{k=0}^r p_{k,r}(t) = \sum_{k=0}^r \mathbf{P}(T_r = k) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$$

$$\sum_{k=0}^r \frac{k}{r} p_{k,r}(t) = \sum_{k=0}^r \frac{k}{r} \mathbf{P}(T_r = k) \stackrel{\text{formule de transfert}}{=} \mathbf{E}(\overline{T_r}) = t$$

$$\sum_{k=0}^r \left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t) = \sum_{k=0}^r \left(\frac{k}{r}\right)^2 \mathbf{P}(T_r = k) \stackrel{\text{formule de transfert}}{=} \mathbf{E}(\overline{T_r}^2) = \frac{t}{r} + \frac{t^2}{r}(r-1) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)t^2 + \frac{1}{r}t$$

Conclusion: On a bien les trois formules demandées

5.e) Dans les trois cas le membre de gauche et le membre de droite sont des polynômes en t et les égalités sont valables sur le segment $[0, 1]$ qui est un ensemble **infini**.

Conclusion: Les trois égalités sont valables pour tout $t \in \mathbb{R}$

6.) D'après le **5.e)**,

$$B_n(1)(X) = \sum_{k=0}^n p_{k,n}(X) = 1 \in \mathbb{R}_2[X],$$

$$B_n(X)(X) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} p_{k,n}(X) = X \in \mathbb{R}_2[X],$$

$$B_n(X^2)(X) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 p_{k,n}(t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)X^2 + \frac{1}{n}X \in \mathbb{R}_2[X],$$

et par combinaison linéaire ($\mathbb{R}_2[X] = \text{vect}(1, X, X^2)$) on peut conclure :

Conclusion: $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par B_n

7.)

$$\text{D'après le 6.) } A_n = M_{1,X,X^2}(\tilde{B}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Analyse : $A_n = aI_3 + bH$, donc avec le coefficient $(2, 1)$, on doit avoir $b = \frac{1}{n}$ puis avec le coefficient $(1, 1)$, $a + b = 1$ soit $a = 1 - \frac{1}{n}$

$$\text{Synthèse : } \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = A_n$$

$$\text{Conclusion: } A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}H$$

8.a) Les valeurs propres de H sont sur la diagonale car H est triangulaire supérieure, donc $\chi_H(x) = (x-1)^2x$ et comme $\text{rg}(H - I_3) = 1$, $\dim E_1 = 2$. On conclut par la 2ème caractérisation que H est diagonalisable.

Conclusion: H est diagonalisable

8.b) $\det Q = 1 \neq 0$ d'où

Conclusion: Q est inversible

8.c) Effectuons la réduction de la matrice H On a facilement $E_1 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Cherchons E_0 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $HX = 0$ on a donc le système :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ donc}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \text{ donc } E_0 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Posons donc $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, par formule de changement de base, on a conclut

Conclusion: $H = QDQ^{-1}$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9.a) Par théorèmes généraux, on a immédiatement : Conclusion: $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = I_3$

9.b) On a $\psi(\lambda M + M') = \lambda \psi(M) + \psi(M')$ pour toutes matrices M et M' et tout réel λ .

Conclusion: ψ est linéaire

9.c) ψ étant linéaire en dimension finie, elle est continue sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc par critère séquentiel, on conclut

Conclusion: $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} A_\ell = M \implies \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \psi(A_\ell) = \psi(M)$

9.d) $A_n = (1 - \frac{1}{n})I_3 + \frac{1}{n}H = (1 - \frac{1}{n})QQ^{-1} + \frac{1}{n}QDQ^{-1} = Q\left((1 - \frac{1}{n})I_3 + \frac{1}{n}D\right)Q^{-1}$

donc $A_n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} Q^{-1} = QD_nQ^{-1}$

Conclusion: $A_n = QD_nQ^{-1}$

9.e)

par T.G., $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} D_n^\ell = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1$ et donc $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{n})^\ell = 0$.

Avec le **9.e)** on a donc $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} A_n^\ell = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$

Calcul de Q^{-1} : Si on voit Q comme la matrice canoniquement associée à un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ et si l'on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ comme on a $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_2$, on alors $f^{-1}(e_1) = e_1$ et $f^{-1}(e_2) = e_2$ et comme $f(e_3) = ae_1 + be_2 + e_3 = -e_2 + e_3$, en composant par

f^{-1} , on a $e_3 = -e_2 + f^{-1}(e_3)$ d'où $f^{-1}(e_3) = e_2 + e_3$. On en déduit que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On effectue le produit $Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$ et on conclut que

Conclusion: $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} A_n^\ell = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9.f)

par T.G. , $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix}$ car $\ln(1 - \frac{1}{n})^n = n \ln(1 - \frac{1}{n}) \sim n(-\frac{1}{n}) \sim -1$, donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 - \frac{1}{n})^n = -1$ et par critère séquentiel $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$

Avec le **9.e)** on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \frac{1}{e} \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix}$

Conclusion: $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \frac{1}{e} \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix}$

10.a)

Le cours et la formule de König-Huygens assure que si Y admet une variance finie, on a $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}((Y - \mathbf{E}(Y))^2) \geq 0$ et donc $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 \geq 0$. On en déduit que $\mathbf{E}(Y)^2 \leq \mathbf{E}(Y^2)$ d'où $\mathbf{E}(Y) \leq |\mathbf{E}(Y)| \leq \sqrt{\mathbf{E}(Y^2)}$

Conclusion: $\mathbf{E}(Y) \leq \sqrt{\mathbf{E}(Y^2)}$

10.b) Par la formule de transfert et le **5.d)** ,

$$\mathbf{E}((t - \overline{T}_n)^2) = \sum_{k=0}^n (t - k/n)^2 p_{k,n}(t) = t^2 - 2t \cdot t + (1 - \frac{1}{n})t^2 + \frac{1}{n}t = \frac{t(1-t)}{n}$$

Avec le **10.a)**

$$\mathbf{E}(|t - \overline{T}_n|) \leq \sqrt{\mathbf{E}(|t - \overline{T}_n|^2)} \leq \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$$

Conclusion: $\mathbf{E}(|t - \overline{T}_n|) \leq \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$

11.a) $\forall (a, b) \in [0, 1]^2 : |f(a) - f(b)| = |(a-b)f'(c)| \leq M_f |a-b|$, par la formule des accroissements finis avec $M_f = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$ (qui existe car f étant de classe C^1 , f' est continue sur le segment $[0, 1]$).

Conclusion: $\forall (a, b) \in [0, 1]^2 : |f(a) - f(b)| \leq M_f |a - b|$

11.b)

Par la formule de transfert, Par la formule de transfert et le **5.d)**,

$\mathbf{E}((f(t) - f(\overline{T}_n))) = \sum_{k=0}^n (f(t) - f(k/n)) p_{k,n}(t)$, donc avec les deux questions précédentes,

$\mathbf{E}((f(t) - f(\overline{T}_n))) \leq \mathbf{E}(|f(t) - f(\overline{T}_n)|) \leq \sum_{k=0}^n |f(t) - f(k/n)| p_{k,n}(t) \leq \sum_{k=0}^n M_f |t - k/n| p_{k,n}(t) \leq M_f \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$

Conclusion: $\mathbf{E}(|f(t) - f(\overline{T}_n)|) \leq M_f \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$

11.c) Posons $\varphi(t) = t(1-t)$, φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = 1 - 2t$, donc φ est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. On en déduit que $\forall t \in [0, 1] : 0 \leq \varphi(t) \leq \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

Comme $\mathbf{E}((f(t) - f(\overline{T}_n))) = f(t) - B_n(f)(t)$, on peut conclure :

Conclusion: $\forall t \in [0, 1] : |f(t) - B_n(f)(t)| \leq \frac{M_f}{2\sqrt{n}}$

11.d)

On déduit de la question précédente que $0 \leq \|f - B_n(f)\|_{\infty, [0,1]} \leq \frac{M_f}{2\sqrt{n}}$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M_f}{2\sqrt{n}} = 0$, on peut conclure :

Conclusion: $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$

12.)

Comme $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ et que $B_n(f)$ est continue sur $[0, 1]$, par théorème d'intégration, on peut conclure :

Conclusion: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 B_n(f)(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$

13.a) On effectue une I.P.P. avec $u = x^a$ et $v' = (1-x)^b$ d'où

Conclusion: $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b+1} dx$

13.b) Posons $J_k = \int_0^1 p_{k,n}(x) dx$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec la question précédente, on a

$J_k = \binom{n}{k} \frac{n}{n-k+1} \int_0^1 x^{k-1} (1-x)^{n-k+1} dx = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \int_0^1 x^{k-1} (1-x)^{n-k+1} dx$
 $= \binom{n}{k-1} \frac{n}{n-k+1} \int_0^1 x^{k-1} (1-x)^{n-k+1} dx = J_{k-1}.$

On en déduit que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $J_k = J_0 = \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

Conclusion: $\int_0^1 p_{k,n}(x) dx = \frac{1}{n+1}$

13.c)

On a $S_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 p_{k,n}(x) dx \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(x) dx = \int_0^1 B_n(f)(x) dx$.

On peut conclure avec le **12.)**

Conclusion: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x) dx$

14.)

Soit f continue sur $[0, 1]$. L'idée est d'approximer uniformément f par une fonction de classe C^1 , justement avec les polynômes de Bernstein.

Soit $\varepsilon > 0$ il existe g de classe C^1 sur $[0, 1]$ tel que $\|f - g\|_{\infty, [0, 1]} \leq \varepsilon/3$ (il suffit de prendre un $B_n(f)$ pour n assez grand). pour tout entier n , on a :

$$\left| S_n(f) - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \left| S_n(f) - S_n(g) \right| + \left| S_n(g) - \int_0^1 g(x) dx \right| + \left| \int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right|$$

Comme $\|f - g\|_{\infty, [0, 1]} \leq \varepsilon/3$, $\left| S_n(f) - S_n(g) \right| \leq \frac{1}{n+1} (n+1) \|f - g\|_{\infty, [0, 1]} \leq \varepsilon/3$ et de même

$$\left| \int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \varepsilon/3.$$

On a donc pour tout entier n : $\left| S_n(f) - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq 2\varepsilon/3 + \left| S_n(g) - \int_0^1 g(x) dx \right|$.

Avec le **13.c)** **il existe** $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N_0$: $\left| S_n(g) - \int_0^1 g(x) dx \right| \leq \varepsilon/3$

On en déduit que $\forall n \geq N_0$: $\left| S_n(f) - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq 3\varepsilon/3 \leq \varepsilon$

Conclusion: Pour toute fonction continue sur $[0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x) dx$

15.a)

Posons $f : u \mapsto \frac{u^a(1+u)^b}{(1+u)^c}$ et $I = [0, +\infty[$. Par T.G., f est continue sur I (les puissances sont entières et $1+u$ ne s'annule pas sur I).

En $+\infty$:

* Si $x = 0$ alors $f(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{c-a}}$

Or $c - a \geq b + 2 \geq 2$ donc $u \mapsto \frac{1}{u^{c-a}}$ est intégrable sur $[1, \infty[$ et par T.C. f est intégrable sur $[0, \infty[$ et l'intégrale de f converge.

* Si $x \neq 0$ alors $f(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^b}{u^{c-a-b}}$

Or $c - a - b \geq 2$ donc $u \mapsto \frac{1}{u^{c-a-b}}$ est intégrable sur $[1, \infty[$ et par T.C. f est intégrable sur $[0, \infty[$ et l'intégrale de f converge.

Conclusion: $\forall x \in [0, 1]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c} du$ converge

15.b)

Posons $f : (x, u) \mapsto \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$, $I = [0, +\infty[$ et $A = [0, 1]$.

Montrons que f vérifie les hypothèses de dérivation des intégrales sous le signe somme.

* Par T.G. , pour tout $u \in I$, $f(\bullet, u)$ est de classe C^1 sur A , donc $f(\bullet, u)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(\bullet, u)$ sont continues sur A et pour tout $x \in A$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = xb \frac{u^a(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c}$.

* Par T.G. , pour tout $x \in A$, $f(x, \bullet)$ est continue et intégrable (question précédente) sur I et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \bullet)$ est continue sur I .

* $\forall x \in A$ et $\forall u \in I$: $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right| = \left| xb \frac{u^a(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c} \right| \leq \left| 1 \cdot b \frac{u^a(1+u)^{b-1}}{(1+u)^c} \right| = \varphi(u)$.

$\varphi(u)$ est continue et intégrable pour les même raisons qu'au **15.a**) : $\varphi(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^b}{u^{c-a-b+1}} \dots$

On peut donc conclure :

Conclusion: F est de classe C^1 sur $[0, 1]$

15.c)

Par T.G. h est de classe C^1 sur $[0, 1[$, pour tout $t \in [0, 1[$: $h'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} > 0$. Donc h est continue strictement croissante de $[0, 1[$ vers $h([0, 1[) = [h(0), \lim_{t \rightarrow 1^-} h(t)[= [0, +\infty[$.

On conclut par le théorème de la bijection :

Conclusion: h est strictement croissante et bijective de $[0, 1[$ sur $[0, +\infty[$

15.d) Le C.D.V. est donc bien C^1 , bijectif et d'où

$$\begin{aligned} * F(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^c} du = \int_0^1 \frac{\left(\frac{t}{1-t}\right)^a}{\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^c} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \int_0^1 t^a (1-t)^{c-a-2} dt \\ &= \frac{a}{c-a-1} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt = \frac{a}{c-a-1} \times \frac{a-1}{c-a} \times \dots \times \frac{1}{c-2} \times \int_0^1 t^{a-a} (1-t)^{c-a+a-2} dt \\ &= \frac{a}{c-a-1} \times \frac{a-1}{c-a} \times \dots \times \frac{1}{c-2} \times \frac{1}{c-1} \\ &= \frac{a!(c-a-2)!}{(c-1)!} \end{aligned}$$

* $F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^{c-b}} du$ et donc on obtient $F(1)$ en remplaçant c par $c-b$ dans le calcul de $F(0)$.

Conclusion: $F(0) = \frac{a!(c-a-2)!}{(c-1)!}$ et $F(1) = \frac{a!(c-b-a-2)!}{(c-b-1)!}$

16.) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n(n) \dots (n)}{k!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$ (car le nombre de termes k est indépendant de n (la variable)).

Soit $t \in]0, 1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$ fixés. Pour tout entier $n \geq k$,

$$f_n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} t^k (1-t)^{n-k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^k}{(1-t)^k k!} [n^k (1-t)^n]$$

Conclusion: $\boxed{\text{Pour tout } t \in]0, 1[, f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^k}{(1-t)^k k!} [n^k (1-t)^n]}$

17.) * Soit $t \in]0, 1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$ fixés. Comme $f_n(t) = O(n^k q^n)$ avec $q = 1 - t \in]0, 1[$, par croissances comparées $f_n(t) = O(\frac{1}{n^2})$ avec $\frac{1}{n^2} \geq 0$ et $(\sum \frac{1}{n^2})$ converge. Donc par T.C. $(\sum f_n(t))$ converge.

* Si $t = 0$, Pour tout entier $n \geq k$, $f_n(t) = 0$, donc $(\sum f_n(0))$ converge.

* Si $t = 1$, Pour tout entier $n \neq k$, $f_n(t) = 0$, donc $(\sum f_n(1))$ converge.

Conclusion: $\boxed{(\sum f_n) \text{ converge simplement sur } [0, 1]}$

18.) * Si $t = 0$, Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^k$, $f_n(t) = 0$, donc $S(0) = 0$.

* Si $t = 1$, Pour tout entier $n \neq k$, $f_n(t) = 0$ et $f_k(1) = 1$, donc $S(1) = 1$.

Conclusion: $\boxed{S(0) = 0 \text{ et } S(1) = 1}$

19.a) Conclusion: $\boxed{\forall u \in]-1, 1[: \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \text{ (et le rayon de convergence est 1)}}$

19.b) Le théorème de dérivation des séries entières permet de dériver termes à termes la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ de rayon de convergence 1 sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$.

Comme on a pour tout entier k , $\forall u \in]-1, 1[: \left(\frac{1}{1-u}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}$ (se démontre par récurrence immédiate)

On en déduit que $\forall u \in]-1, 1[: \left(\frac{1}{1-u}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-u)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) u^{n-k}$

Conclusion: $\boxed{\forall u \in [0, 1[: \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) u^{n-k} = \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}}$

19.c) On a déjà vu que $S(1) = 1 = \frac{1}{1}$.

$\forall t \in]0, 1[: S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{t^k}{k!} \frac{k!}{(1-(1-t))^{k+1}} = \frac{1}{t}$

Conclusion: $\boxed{\forall t \in]0, 1[: S(t) = \frac{1}{t}}$

19.d) Si la série $(\sum f_n)$ convergerait normalement sur $[0, 1]$, alors on pourrait utiliser le théorème de la double limite : $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$.

Or $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$: absurde !

Conclusion: $\boxed{\text{la série } (\sum f_n) \text{ ne converge pas normalement (ni uniformément) sur } [0, 1]}$