

Partie I

I.1) Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

■ Montrons tout d'abord que tMSM est symétrique: ${}^t({}^tMSM) = {}^tM^tS^t({}^tM) = {}^tMSM$

■ Ensuite, pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX^tMSMX = {}^t(MX)S(MX)$

Or $MX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, donc ${}^t(MX)S(MX) \geq 0$.

Finalement, ${}^tMSM \in S_n^+(\mathbb{R})$.

I.2) Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n

Écrivons $S = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de S , et P une matrice orthogonale d'ordre n . On peut donc écrire $D = {}^tPSP$

Remarquons que si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S (comptées avec leur ordre de multiplicité),

alors ${}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

On en déduit que $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $S_n^{++}(\mathbb{R})$) $\Rightarrow D = {}^tPSP \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$)

$$\Rightarrow {}^tYDY \geq 0 \text{ (resp } > 0 \text{ si } Y \neq 0)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \geq 0 \text{ (resp } > 0 \text{ si } Y \neq 0)$$

En prenant successivement pour Y chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$
(resp. $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$)

Réciproquement si on suppose toutes les valeurs propres de S positives (respectivement strictement positives), alors pour tout Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \geq 0$ (resp > 0 si $Y \neq 0$), donc $D \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$), et par suite

$$S = ({}^tP^{-1})DP^{-1} \in S_n^+(\mathbb{R}) \text{ (resp. } S_n^{++}(\mathbb{R}))$$

I.3) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est clairement symétrique. Pour montrer qu'elle est positive, déterminons ses valeurs propres: son polynôme caractéristique est $X^2 - 3X + 1$, qui admet pour racines $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Les valeurs propres de S sont donc strictement positives (car $\sqrt{5} < 3$).

Bilan: A est symétrique positive, et même définie positive.

I.4) La matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est clairement symétrique. En utilisant la matrice A de la question précédente, on peut

affirmer que les valeurs propres de B sont $-1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. **La matrice B n'est donc pas positive.**

I.5) Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, et soit une matrice symétrique réelle semblable à S , c'est-à-dire il existe une matrice d'ordre n inversible P telle que $T = PSP^{-1}$. Montrons que $T \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Les matrices T et S représentent le même endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans deux bases différentes, donc leurs valeurs propres sont les mêmes, donc celles de T sont positives, c'est-à-dire $T \in S_n^+(\mathbb{R})$.

I.6) a) Soit $M \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$. Si λ est une valeur propre de M , alors λ est non nul (sinon il existerait $X \neq 0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = 0$, ce qui contredit le fait que M est inversible), et λ^{-1} est valeur propre de M^{-1} (en effet si on note X un vecteur propre non nul associé à la valeur propre λ , alors $MX = \lambda X \Rightarrow X = \lambda M^{-1}X \Rightarrow \lambda^{-1}X = M^{-1}X$, c'est-à-dire λ^{-1} est valeur propre de M^{-1} avec comme vecteur propre X).

On a donc montré l'implication: $\lambda \in \text{sp}(M) \Rightarrow \lambda^{-1} \in \text{sp}(M^{-1})$.

A présent si μ est une valeur propre de M^{-1} , alors en appliquant le raisonnement précédent à M^{-1} au lieu de M , on montre que μ est non nul et que μ^{-1} est valeur propre de $(M^{-1})^{-1} = M$

Finalement, nous avons l'équivalence $\lambda \in \text{sp}(M) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \text{sp}(M^{-1})$.

Bilan: si le spectre de M est $\text{sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, alors le spectre de M^{-1} est: $\text{sp}(M^{-1}) = \{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_p^{-1}\}$

I.6) b) Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Écrivons $S = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de S, et P une matrice orthogonale d'ordre n.
D est inversible (matrice diagonale de coefficients diagonaux non nuls), donc S est inversible comme produit de matrices inversibles. De plus, les valeurs propres de S^{-1} étant les inverses des valeurs propres de S, elles ont bien strictement positives, c'est-à-dire $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.7) Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n

Écrivons $S = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de S, et P une matrice orthogonale d'ordre n.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^tYDY = {}^t(PY)S(PY) = 0$ par hypothèse.

$$\text{Or } {}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Remarquons que si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S (comptées avec leur ordre de multiplicité), alors ${}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

En prenant successivement pour Y chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$, c'est-à-dire **toutes les valeurs propres de S sont nulles.**

$$\text{Par suite } S = PDP^{-1} = P0P^{-1} = 0$$

I.8) a) Si $S_2 - S_1 \in S_n^+(\mathbb{R})$, et si $S_1 - S_2 \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX(S_2 - S_1)X \geq 0$, et ${}^tX(S_1 - S_2)X \geq 0$, donc ${}^tX(S_2 - S_1)X = 0$. En utilisant la question 7), on en déduit donc que $S_2 - S_1 = 0$, c'est-à-dire $S_1 = S_2$.

I.8) b) Considérons l'exemple suivant $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Alors $S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \notin S_n^+(\mathbb{R})$, et $S_1 - S_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \notin S_n^+(\mathbb{R})$.

I.8) c) Considérons l'exemple suivant $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors $S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_n^+(\mathbb{R})$, mais $S_2 - S_1 \notin S_n^{++}(\mathbb{R})$ (pourtant on a bien $S_2 \neq S_1$)

I.8) d) Supposons que $S_2 - S_1 \in S_n^+(\mathbb{R})$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la matrice $\alpha S_2 - \alpha S_1 = \alpha(S_2 - S_1)$ admet des valeurs propres positives si $\alpha \geq 0$, et négatives si $\alpha \leq 0$.

Donc ■ si $\alpha \geq 0$, $\alpha S_1 \leq \alpha S_2$ ■ si $\alpha \leq 0$, $\alpha S_2 \leq \alpha S_1$

I.8) e) $(S_2 + S) - (S_1 + S) = S_2 - S_1 \in S_n^+(\mathbb{R})$, donc on a bien $S_1 \leq S_2 \Rightarrow S_1 + S \leq S_2 + S$

I.9) Si $S_2 - S_1 \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors ${}^tMS_2M - {}^tMS_1M = {}^tM(S_2 - S_1)M \in S_n^+(\mathbb{R})$ d'après la question 1)

I.10) a) Si on suppose que $S - I_n \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de cette matrice sont positives. Or si spectre(S) = $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, alors spectre(S - I_n) = $\{\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_p - 1\}$. On peut donc dire que **toutes les valeurs propres de S sont supérieures à 1.** On en déduit en particulier que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc **S est inversible** d'après la question 6)b).

I.10) b) D'après la question 6)a) spectre(S^{-1}) = $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_p^{-1}\}$, donc **les valeurs propres de S^{-1} appartiennent à]0,1]**, en particulier $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $S^{-1} > 0$.

De plus spectre($S^{-1} - I_n$) = $\{\lambda_1^{-1} - 1, \dots, \lambda_p^{-1} - 1\}$, donc les valeurs propres de $S^{-1} - I_n$ sont négatives, c'est-à-dire $S^{-1} \leq I_n$.

I.11) a) S est symétrique car ${}^tS = {}^t({}^tMM) = {}^tM({}^tM) = {}^tMM = S$

De plus pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)(MX) = y_1^2 + \dots + y_n^2$ si on pose $MX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Or $X \neq 0 \Rightarrow MX \neq 0$ car M est inversible, donc ${}^tXSX = y_1^2 + \dots + y_n^2 > 0$
On a donc bien **S définie positive**.

I.11) b) Si S est diagonale définie positive, alors S est de la forme $S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}$, où pour tout entier i entre 1 et n $\alpha_i > 0$.

En posant $M = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix}$, on a bien **M inversible** et $S = {}^tMM$

I.11) c) Si S est symétrique définie positive, alors on peut écrire $S = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale définie positive.
Donc d'après la question précédente, il existe $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $D = {}^tMM$.

On a alors $S = P^tMMP^{-1} = {}^t(M^tP)(M^tP)$ car $P^{-1} = {}^tP$

En posant $N = M^tP$, on a bien **N** $\in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ (produit de matrices inversibles), et $S = {}^tNN$

I.12) Notre hypothèse est $0 < {}^tM_1M_1 \leq S_2$

D'après la question 9), ceci implique ${}^t(M_1^{-1}) {}^tM_1M_1 M_1^{-1} \leq {}^t(M_1^{-1}) S_2 M_1^{-1}$, c'est-à-dire $I_n \leq {}^t(M_1^{-1}) S_2 M_1^{-1}$

En utilisant ensuite la question 10)a), on en déduit que ${}^t(M_1^{-1}) S_2 M_1^{-1}$ est inversible, donc S_2 est inversible.

En utilisant à présent la question 10)b), on a $({}^t(M_1^{-1}) S_2 M_1^{-1})^{-1} \leq I_n$, d'où ${}^tM_1 S_2^{-1} M_1 \leq I_n$

On utilise à nouveau la question 9) pour écrire $M_1^{-1}({}^tM_1 S_2^{-1} M_1){}^t(M_1^{-1}) \leq M_1^{-1} {}^t(M_1^{-1})$, d'où $S_2^{-1} \leq S_1^{-1}$

Partie II

II.1) a) Étant donné que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, les systèmes suivants sont équivalents:

$$\begin{cases} I_n = P_1 + P_2 \\ S = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (S - \lambda_2 I_n) \\ P_2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 I_n - S) \end{cases} \quad \text{Le système proposé admet donc bien un unique couple solution } (P_1, P_2)$$

Ces deux matrices sont symétriques comme combinaison linéaire de deux matrices symétriques.

II.1) b) Si on écrit $P^{-1}SP = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ où $D_1 = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (1 étant répété n_1 fois) et $D_2 = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ (1 étant répété n_2 fois), alors on a $S = \lambda_1 P D_1 P^{-1} + \lambda_2 P D_2 P^{-1}$.

Si on pose $P_1 = P D_1 P^{-1}$ et $P_2 = P D_2 P^{-1}$, on a bien $S = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$, et de plus $P_1 + P_2 = P(D_1 + D_2)P^{-1} = P(I_n)P^{-1} = I_n$

On a alors $P_1^2 = P D_1^2 P^{-1} = P D_1 P^{-1} = P_1$, de même $P_2^2 = P_2$

$P_1 P_2 = P(D_1 D_2)P^{-1} = P 0 P^{-1} = 0$, et $P_2 P_1 = 0$

$\text{rg}(P_1) = n_1$ et $\text{rg}(P_2) = n_2$

II.1) c) Pour tout entier naturel k , $S^k = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)^k$

Les matrices P_1 et P_2 commutent, donc nous pouvons appliquer la formule du binôme de Newton

$$S^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda_1^{k-i} P_1^{k-i} \lambda_2^i P_2^i$$

Or $P_1 P_2 = 0$, $P_2 P_1 = 0$, $P_1^i = P_1$ et $P_2^i = P_2$ si i est un entier naturel non nul, donc finalement la formule se simplifie:

$$S^k = \lambda_1^k P_1 + \lambda_2^k P_2$$

Soit Q un polynôme à coefficients réels, que nous pouvons écrire sous la forme $Q = a_0 + a_1 X + \dots + a_q X^q$

On a alors $Q(S) = a_0 + a_1 S + \dots + a_q S^q = a_0 + a_1 (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) + \dots + a_q (\lambda_1^q P_1 + \lambda_2^q P_2) = Q(\lambda_1) P_1 + Q(\lambda_2) P_2$

II.1) d) $S_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Déterminons son polynôme caractéristique:

$$P_{S_0}(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-X & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n+1-X & 1 & \dots & 1 \\ n+1-X & 2-X & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & 1 \\ n+1-X & \cdot & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (n+1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-X & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$P_{S_0}(X) = (n+1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1-X & & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1-X \end{vmatrix} \quad (\text{on a soustrait la ligne 1 à chacune des autres lignes du déterminant})$$

Finalement, $P_{S_0}(X) = (n+1-X)(1-X)^{n-1}$

Donc la matrice S_0 admet deux valeurs propres $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=n+1$

En utilisant les formules $P_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(S_0 - \lambda_2 I_n)$ et $P_2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 I_n - S_0)$, on obtient

$$P_1 = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & -1 \\ -1 & \cdot & -1 & n-1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II.2) a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, notons X et Y les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a alors $(u(x) | y) = {}^t(SX)Y = {}^tX {}^tS Y = {}^tX S Y = (x | u(y))$

II.2) b)

Si i et j sont deux entiers naturels distincts compris entre 1 et p , considérons x_i un vecteur du sous-espace propre E_i , et x_j un vecteur du sous-espace propre E_j .

On a alors $\lambda_i (x_i | x_j) = (\lambda_i x_i | x_j) = (u(x_i) | x_j) = (x_i | u(x_j)) = \lambda_j (x_i | x_j)$

Or $\lambda_i \neq \lambda_j$, donc $(x_i | x_j) = 0$. Nous avons donc bien montré que **E_i est orthogonal à E_j** .

Comme de plus S est diagonalisable, on peut écrire $\bigoplus_{i=1}^p E_i = \mathbb{R}^n$

II.2) c) i) Tout projecteur orthogonal est un endomorphisme symétrique, donc est associé à une matrice symétrique dans toute base orthonormée. Par conséquent la matrice **P_i est symétrique**.

II.2) c) ii) Si x_j est élément de E_j , alors **$p_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$** , et **$p_i(x_j) = x_j$ si $i=j$** .

On en déduit que si $i \neq j$, alors pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $p_i(p_j(x)) = 0$ car $p_j(x) \in E_j$

Donc $p_i \circ p_j$ est l'application nulle, d'où **$P_i P_j = 0$** .

II.2) d) En reprenant les notations employées dans la réponse à la question **II.2) c) i)**, pour tout entier i entre 1 et p , $P_i = P D_i P^{-1}$

, donc $\sum_{i=1}^p P_i = P \left(\sum_{i=1}^p D_i \right) P^{-1} = P I_n P^{-1} = I_n$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i = P \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i D_i \right) P^{-1} = P D P^{-1} = S$

II.3) a) $Sf(S) = \sum_{j=1}^p \lambda_j P_j \times \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) P_i$ Or si $i \neq j$, $P_i P_j = 0$, donc $Sf(S) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(\lambda_i) P_i^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(\lambda_i) P_i$ car $P_i^2 = P_i$

On obtient la même expression en calculant $f(S)S$.

II.3) b) Soit X un vecteur propre de S pour la valeur propre λ_k . On a alors $f(S)X = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) P_i X$

Or $P_i X = 0$ si $i \neq k$, et $P_i X = X$ si $i = k$ (car P_i est la matrice de la projection orthogonale sur E_i)

Donc $f(S)X = f(\lambda_k)X$, c'est-à-dire **X est un vecteur propre de $f(S)$ pour la valeur propre $f(\lambda_k)$** .

II.3) c) En reprenant les notations de la question II.1) d), $\cos(\pi S_0) = \cos(\pi)P_1 + \cos((n+1)\pi)P_2$, c'est-à-dire:

$$\cos(\pi S_0) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & -1 \\ -1 & \cdot & -1 & n-1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II.4) a) On peut définir $g(S)$ si et seulement si les valeurs propres de S sont strictement positives, autrement dit si et seulement si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

En notant $S = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$ la décomposition spectrale de S , $g(S) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i} P_i$

Or ceci est la décomposition spectrale de S^{-1} , car les valeurs propres de S^{-1} sont les inverses des valeurs propres de S , associées aux mêmes sous-espaces propres.

On a donc bien $g(S) = S^{-1}$.

On en déduit que **g est matriciellement décroissante sur $]0; +\infty[$** car si A et B sont deux matrices de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A \leq B$, alors $B^{-1} \leq A^{-1}$ d'après la question I.12).

II.4) b) On peut définir $h(S)$ si et seulement si les valeurs propres de S sont strictement supérieures à -1.

En notant $S = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$ la décomposition spectrale de S , $h(S) = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{\lambda_i + 1} P_i = \sum_{i=1}^p P_i - \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i + 1} P_i$ (car si $x > -1$, $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$)

Or les valeurs propres de $I_n + S$ sont les valeurs propres de S augmentées de 1, associées aux mêmes sous-espaces propres, donc pour tout entier i entre 1 et p , $\frac{1}{\lambda_i + 1}$ correspond à une valeur propre de $(I_n + S)^{-1}$

Finalement, on a bien $h(S) = I_n - (I_n + S)^{-1}$

Montrons que **h est matriciellement croissante sur $]0; +\infty[$** :

Si A et B sont deux matrices de $S_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres strictement supérieures à -1, alors:

$$A \leq B \Rightarrow I_n + A \leq I_n + B \Rightarrow (I_n + B)^{-1} \leq (I_n + A)^{-1} \Rightarrow -(I_n + A)^{-1} \leq -(I_n + B)^{-1} \Rightarrow I_n - (I_n + A)^{-1} \leq I_n - (I_n + B)^{-1} \Rightarrow h(A) \leq h(B)$$

II.5) a) Déterminons les valeurs propres de la matrice $A(x) - B(x)$:

Après calculs, le polynôme caractéristique de cette matrice est $X \left(X - \frac{\text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x)}{\text{ch}(x)} \right)$, donc les valeurs propres de cette matrice

sont 0 et $\frac{\text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x)}{\text{ch}(x)}$, qui sont bien positives. Donc $A(x) - B(x) \in S_n^+(\mathbb{R})$, c'est-à-dire **$B(x) \leq A(x)$** .

II.5) b) Déterminons les valeurs propres de la matrice $A(x)$:

Après calculs, le polynôme caractéristique de cette matrice est $X^2 - 2\text{ch}(x)X + 1$, de racines $\lambda_1 = e^x$ et $\lambda_2 = e^{-x}$ (distinctes car $x \neq 0$)

En utilisant les formules $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (A(x) - \lambda_2 I_2)$ et $P_2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 I_2 - A(x))$, on obtient :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La décomposition spectrale de $A(x)$ est donc **$A(x) = e^x \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + e^{-x} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$**

II.5) c) Si $\alpha > 0$, $p_\alpha(A(x)) = p_\alpha(e^x)P_1 + p_\alpha(e^{-x})P_2 = e^{\alpha x}P_1 + e^{-\alpha x}P_2 = A(\alpha x)$

II.5) d) De manière immédiate, on peut affirmer que la décomposition spectrale de $B(x)$ est $B(x) = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\text{ch}(x)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } p_\alpha(B(x)) = p_\alpha(0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p_\alpha\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{ch}^\alpha(x)} \end{pmatrix}$$

II.5) e) Après simplifications, $\det[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))] = 1 - \frac{\text{ch}(\alpha x)}{\text{ch}^\alpha(x)}$

En utilisant des développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0, on obtient :

$$1 - \frac{\text{ch}(\alpha x)}{\text{ch}^\alpha(x)} = \frac{(\alpha - \alpha^2) \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)}{1 + \alpha \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)} \text{ qui est équivalent au voisinage de 0 à } \frac{\alpha(1 - \alpha)x^2}{2}$$

Si $\alpha > 1$, cette expression est négative au voisinage de 0.

Donc pour x au voisinage de 0, la matrice $p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))$ admet au moins une valeur propre négative, c'est-à-dire $p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x)) \notin S_n^+(\mathbb{R})$.

On a donc $B(x) \leq A(x)$, mais on n'a pas $p_\alpha(B(x)) \leq p_\alpha(A(x))$.

L'application p_α n'est donc pas matriciellement croissante sur $]0; +\infty[$ si $\alpha > 1$.

Partie III

III.1) a) Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, , alors ${}^t X A(t) X = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n x_k a_{ik}(t)$, donc ${}^t X A X$ est intégrable sur I comme somme et produit de fonctions intégrables sur I.

On a alors, par linéarité de l'intégrale, $\int_I {}^t X A(t) X dt = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n x_k \int_I a_{ik}(t) dt = {}^t X \int_I A(t) dt X$

III.1) b) Si on note $M = (m_{ij})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $f(t)M = (f(t)m_{ij})$, donc tous les coefficients de cette matrice sont intégrables sur I car f est intégrable sur I. De plus, pour tous entiers i et j entre 1 et n, $\int_I f(t)m_{ij} dt = m_{ij} \int_I f(t) dt$, c'est-à-dire

$$\int_I f(t)M dt = \left(\int_I f(t) dt \right) M$$

III.2) a) Soit $\alpha \in]0,1[$, et soit $x > 0$. Montrons que l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+xt)t^\alpha} dt$ est bien définie:

- remarquons que $1+xt \neq 0$ si $x > 0$ et $t \geq 0$, l'intégrale est donc impropre en 0 et en $+\infty$
- étude en 0: $\frac{x}{(1+xt)t^\alpha} \sim \frac{x}{t^\alpha}$, dont l'intégrale converge en 0 (intégrale de Riemann avec $\alpha \in]0,1[$)
- étude en $+\infty$: $\frac{x}{(1+xt)t^\alpha} \sim \frac{1}{t^{\alpha+1}}$, dont l'intégrale converge en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $\alpha+1 > 1$)

III.2) b) En effectuant le changement de variable $u = xt$ ($du = xdt$), on obtient les égalités suivantes:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+xt)t^\alpha} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+u)u^\alpha} du = x^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)u^\alpha}$$

Posons $C = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)u^\alpha}$. on a alors $C > 0$ (car la fonction $u \mapsto \frac{1}{(1+u)u^\alpha}$ est continue strictement positive sur $]0; +\infty[$) et C vérifie $F(x) = C x^\alpha$

III.2) c) Soit $t > 0$, et soit S une matrice symétrique définie positive (donc toutes les valeurs propres de S sont strictement positives). Si on note spectre $(S) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, et $S = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$ la décomposition spectrale de S , alors spectre $(S^{-1} + tI_n) = \{\lambda_1^{-1} + t, \dots, \lambda_p^{-1} + t\}$, donc **toutes les valeurs propres de $S^{-1} + tI_n$ sont strictement positives (car $t > 0$).**
On en déduit en particulier que $S^{-1} + tI_n$ est inversible, et que son inverse a pour décomposition spectrale

$$(S^{-1} + tI_n)^{-1} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{(\lambda_i)^{-1} + t} P_i = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i t} P_i$$

III.2) d) En utilisant la question III.1)b), on en déduit que $F(S) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i t} P_i dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} (S^{-1} + tI_n)^{-1} dt$

III.2) e) Soit $t > 0$. On a les implications suivantes:

$$A \leq B \Rightarrow B^{-1} \leq A^{-1} \Rightarrow B^{-1} + tI_n \leq A^{-1} + tI_n \Rightarrow (A^{-1} + tI_n)^{-1} \leq (B^{-1} + tI_n)^{-1}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X (A^{-1} + tI_n)^{-1} X \leq {}^t X (B^{-1} + tI_n)^{-1} X$$

On en déduit que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X \frac{1}{t^\alpha} (A^{-1} + tI_n)^{-1} X \leq {}^t X \frac{1}{t^\alpha} (B^{-1} + tI_n)^{-1} X$

Par croissance de l'intégrale, on a alors $\int_0^{+\infty} {}^t X \frac{1}{t^\alpha} (A^{-1} + tI_n)^{-1} X dt \leq \int_0^{+\infty} {}^t X \frac{1}{t^\alpha} (B^{-1} + tI_n)^{-1} X dt$, c'est-à-dire

$${}^t X \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} (A^{-1} + tI_n)^{-1} dt \right] X \leq {}^t X \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} (B^{-1} + tI_n)^{-1} dt \right] X.$$

On a donc montré que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X F(A) X \leq {}^t X F(B) X$, c'est-à-dire $F(A) \leq F(B)$.

La fonction F est donc matriciellement croissante sur $]0, +\infty[$.

De plus, toujours sous l'hypothèse $A \leq B$, on a $F(A) \leq F(B)$, ce qui est équivalent à $CA^\alpha \leq CB^\alpha$, c'est-à-dire $A^\alpha \leq B^\alpha$ (car $C < 0$)

L'application p_α , si $\alpha \in]0, 1[$, est donc matriciellement croissante sur $]0, +\infty[$.

III.3) a) Soit $x > 0$. Soit $X > 0$. $\int_0^x \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt = \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \ln(x+t) \right]_0^x = \ln\left(\frac{\sqrt{1+X^2}}{x+X} \right) + \ln(x)$ tend vers $\ln(x)$

lorsque X tend vers $+\infty$.

III.3) b) On utilise à nouveau la décomposition spectrale $S = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$, donc $\ln(S) = \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^p \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\lambda_i+t} \right) P_i dt$

Or $\sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i+t} P_i$ est la décomposition spectrale de $(S+tI_n)^{-1}$, et comme $\sum_{i=1}^p P_i = I_n$, on peut écrire:

$$\ln(S) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (S+tI_n)^{-1} \right) dt$$

III.3) c) Soient A et B dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, telles que $A \leq B$.

On a alors $(B+tI_n)^{-1} \leq (A+tI_n)^{-1}$, d'où $\frac{t}{1+t^2} I_n - (A+tI_n)^{-1} \leq \frac{t}{1+t^2} I_n - (B+tI_n)^{-1}$

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX \left[\frac{t}{1+t^2} I_n - (A+tI_n)^{-1} \right] X \leq {}^tX \left[\frac{t}{1+t^2} I_n - (B+tI_n)^{-1} \right] X$$

En passant à l'intégrale, et en utilisant la question précédente, on obtient bien $\ln(A) \leq \ln(B)$, c'est-à-dire **$\ln$ est matriciellement croissante sur $]0, +\infty[$.**