

Partie I – Exemples élémentaires

I.A.1 Dériver (P_1) par rapport à y puis poser $y = x$.

I.A.2 L'appartenance à $E_n(I)$ peut s'établir par récurrence, ainsi que la formule donnant la dérivée :

$$(M^k)' = \sum_{p=0}^{k-1} M^p M' M^{k-p-1}$$

I.A.3 La continue dérivabilité de M^{-1} résulte par exemple d'une expression de l'inverse à l'aide de la matrice complémentaire, mais la dérivée s'exprime plus simplement grâce à la dérivation de $MM^{-1} = \mathbb{I}_n$: on obtient $(M^{-1})' = -M^{-1}M'M^{-1}$.

I.B.1 On obtient facilement $\left(\frac{c}{b}\right)' = \left(\frac{d-a}{b}\right)' = 0$. Il s'ensuit que $\frac{c}{b}$ et $\frac{d-a}{b}$ sont des constantes. On a donc des scalaires λ et μ tels que $M(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ \lambda b(x) & a(x) + \mu b(x) \end{pmatrix}$ pour tout $x \in I$. Donc, on peut choisir $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ et M vérifie aussi (P_1) .

I.B.2 L'existence de X est classique. Si $BA = AB$, alors on a $\begin{cases} BX &= uX + vAX \\ BAX &= uAX + vA^2X \end{cases}$ de sorte que $B = u\mathbb{I}_2 + vA$.

I.B.3 L'existence du couple (u, v) résulte de la question précédente. Montrons que u et v sont *localement* continues (*sic!*). Si $x_0 \in I$, alors par exemple $a(x_0) \neq d(x_0)$ car $M(x_0)$ n'est pas scalaire. On a donc

$$a(x) \neq d(x) \text{ sur tout un voisinage } J \subset I \text{ de } x_0. \text{ Or, } \begin{cases} u + va &= a' \\ u + vd &= d' \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} u &= \frac{a'd - ad'}{d - a} \\ v &= \frac{d' - a'}{d - a} \end{cases}$$

montre que u et v sont continues sur J . **On conclut de même si $b(x_0) \neq 0$ ou $c(x_0) \neq 0$.**

On obtient alors $C' = vC$, que l'on résout composante par composante :

$$\forall x \in I, C(x) = \begin{pmatrix} \alpha \exp V(x) & \beta \exp V(x) \\ \gamma \exp V(x) & \delta \exp V(x) \end{pmatrix}$$

où V est une primitive de v et où α, β, γ et δ sont des scalaires. Comme $C(x_0) = 0$, on conclut que $C = \underline{0}$, et ce pour tout $x_0 \in I$, de sorte que M vérifie (P_1) .

I.B.4a On vérifie essentiellement que b est bien C^1 ; le reste est mécanique.

I.B.4b (P_2) équivaut au système $(bc' = b'c, xb' = 2b, xc' = 2c)$. La solution générale d'icelui est

$$\begin{cases} x \leq 0 & \mapsto (b(x), c(x)) = (\alpha x^2, \beta x^2) \\ x \geq 0 & \mapsto (b(x), c(x)) = (\gamma x^2, \delta x^2) \end{cases}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des scalaires.

On vérifie alors

1. que (P_1) est satisfaite si, et seulement si, $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$,
2. que $\text{Vect} \{M(x), x \in I\}$ est de dimension 2 dans ce cas, et 3 sinon. En effet, une famille génératrice en est toujours $\left\{ \mathbb{I}_2, \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \delta & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

I.C.1 Cela résulte du théorème de relèvement des applications C^1 .

I.C.2 M est alors de la forme $x \mapsto \begin{pmatrix} \cos \vartheta(x) & \sin \vartheta(x) \\ \sin \vartheta(x) & -\cos \vartheta(x) \end{pmatrix}$. Ainsi, (P_2) équivaut à $\vartheta' = 0$ c'est-à-dire à M constante.

Partie II – Étude de cas particuliers

II.A Appliquer le résultat admis au sous-espace vectoriel E_0 des matrices antisymétriques réelles d'ordre n . Le résultat subsiste par exemple pour une équation de la forme

$$M'(x) = \sum_{k=0}^m a_k(x) {}^t P_k(x) M^{2k+1} P_k(x)$$

où $P_0, \dots, P_m$ sont des fonctions matricielles continues sur I .

II.B.1 On obtient $T'(x) = \sum_{k=0}^m a_k(x) T^k(x)$. On applique alors $\mathcal{T}$ au sous-espace vectoriel E_1 des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre n .

II.B.2 Chaque composante $T_{i,i}$ est solution de $y' = \sum_{k=0}^m a_k(x) y^k$, de sorte que $T(x)$ est stricte pour tout $x \in I$ si, et seulement si, 0 est solution de cette équation, c'est-à-dire si, et seulement si, $a_0 = 0$.

II.B.3 Si $T'(x) = \sum_{k=1}^m a_k(x) T^k(x)$, alors T^r est solution de l'équation (E) :

$$M' = r a_1(x) M + r a_2(x) T M + \dots + r a_m(x) T^{m-1} M = (r a_1(x) M + r a_2(x) T M + \dots + r a_m(x) T^{m-1} M)$$

(En effet, cela découle de **I.A.2** sachant qu'en plus T et T' commutent.) Le résultat $\mathcal{T}$ appliqué au sous-espace vectoriel E'_1 des matrices triangulaires supérieures réelles strictes d'ordre n montre alors que l'équation (E), avec le problème de CAUCHY $M(x_0) = 0$, n'admet comme solution maximale que la solution nulle. De cela suit que $T^r = 0$ (et, d'ailleurs, que l'indice de nilpotence de $T(x)$ est constant puisque, on vient de le voir, il admet en tout point un maximum local).

II.C.1 Appliquer $\mathcal{T}$ au sous-espace vectoriel $\mathfrak{z}$ des matrices réelles d'ordre n qui commutent avec $U(x_0)$.

II.C.2 Si l'équation est polynomiale, les conditions du **II.C.1** sont satisfaites, ce quel que soit $x_0 \in I$. Donc (P_1) est satisfaite, et cela implique (P_2) . Cela étant, on peut aussi appliquer $\mathcal{T}$ au sous-espace vectoriel $\mathfrak{z}' = \mathbb{R}[U(x_0)]$ et cela montre que $U(x) \in \mathfrak{z}'$ pour tout x , de sorte que, grâce par exemple au théorème de CAYLEY-HAMILTON,

$$\dim(\text{Vect}(\{U(x), x \in I\})) \leq n$$

[Ce résultat illustre celui du **I.B.4b**.]

II.D Posons $\varphi(t) = \exp(tM) N \exp(-tM)$. Alors, φ est solution de

$$\begin{cases} \varphi' &= M \varphi - \varphi M \\ \varphi(0) &= N \end{cases}$$

et $\mathcal{T}$ appliqué dans E à cette équation montre que $\varphi(t) \in E$ pour tout t .

Partie III – Cas des matrices orthogonales

III.A.1 Avec ces hypothèses, la constante $x \mapsto U(x_0)$ est solution de $(\mathcal{E}')$ et $\mathcal{T}$ montre que $U(x) =$

$U(x_0)$ pour tout x .

III.A.2 $N - J$ est solution de $M' = -a(x)({}^tUM + MU)$. Or, $N(x_0) - J = 0$, et la constante nulle vérifie aussi cette équation, ce qui implique que $N(x) = J$ pour tout x . De cela suit, si J est inversible, que $\det^2(U(x)) = 1$ pour tout x puis que $\det U(x)$ est une constante (argument de valeur intermédiaire).

III.B.1a C'est une propriété des matrices de rotation.

III.B.1b La matrice demandée est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un ϑ réel. Alors $M_B(C) =$

$\begin{pmatrix} 0 & -\sin \vartheta & -\sin 2\vartheta \\ 1 & \cos \vartheta & \cos 2\vartheta \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est $\det_B(C) = 2 \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) \neq 0$. Donc, C est une base de $\mathbb{R}^3$.

III.B.1c Procéder comme en **I.B.3**.

III.B.1d On a $({}^tUU)' = 0 = (u + w)(U + {}^tU) + 2v\mathbb{I}_3$. Comme U vérifie les hypothèses de **III.B**, $\{\mathbb{I}_3, U + {}^tU\}$ est libre et on en déduit que $v = 0$ et $w = -u$. Donc $U' = u(\mathbb{I}_3 - U^2)$ et U satisfait bien une équation de la forme attendue.

III.B.2 L'introduction de A (*transformation de CAYLEY*) est licite car, vu les hypothèses, $x \mapsto (\mathbb{I}_3 + U(x))^{-1}$ est définie et C^1 (*confer I.A.3*). Alors, la formule $A = (\mathbb{I}_3 + U)^{-1}(\mathbb{I}_3 - U)$ montre que $U(x)$ et $A(x)$ commutent pour tout x . Maintenant, $\mathbb{I}_3 + A(x)$ est inversible pour tout x : si $AX = -X$ pour $X \in \mathbb{R}^3$, alors $(\mathbb{I}_3 + U)AX = (\mathbb{I}_3 - U)X$ montre que $2X = 0$ puis $X = 0$. Alors, $U = (\mathbb{I}_3 + A)^{-1}(\mathbb{I}_3 - A)$ donne, après calcul, $A' = -2uA$. De cela suit $A(x) = \exp(-2Y(x))A_0$, où $A_0 = A(x_0)$ et $Y(x) = \int_{x_0}^x u(t) dt$. Donc, quel que soit x , $U(x) = (\mathbb{I}_3 + \exp(-2Y(x))A_0)^{-1}(\mathbb{I}_3 - \exp(-2Y(x))A_0)$. Inversement, quoique cela ne soit pas demandé, on vérifie que U vérifie les hypothèses du **III.B** si, et seulement si, A_0 est une matrice antisymétrique non nulle.

[À noter que les matrices trouvées correspondent à des rotations de même axe : avec les notations *supra*, pour $x \in I$ et $X \in \mathbb{R}^3$, $U(x)X = X \iff A(x)X = 0 \iff A_0X = 0$. Cela explique la construction faite à la question suivante : pour obtenir des $U(x)$ qui ne commutent pas, on leur autorise un subreptice changement d'axe à la faveur d'un passage par la matrice unité, matrice canonique d'une rotation qui a pléthore d'axes comme on le sait en général.]

III.C Soit ψ une fonction C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ et qui ne soit constante ni sur $\mathbb{R}^+$ ni sur $\mathbb{R}^-$. On pose

$$M(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos \psi(x) & -\sin \psi(x) & 0 \\ \sin \psi(x) & \cos \psi(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } x \leq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi(x) & -\sin \psi(x) \\ 0 & \sin \psi(x) & \cos \psi(x) \end{pmatrix} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Alors, $M(x)$ et $M'(x)$ commutent pour tout x . En revanche, $M(x)$ et $M(y)$ ne commutent pas dès lors que $x < 0 < y$, $\psi(x) \neq 0$, $\psi(y) \neq 0$, $|\psi(x)| < \pi$, $|\psi(y)| < \pi$ (et un tel couple (x, y) existe).

III.D Vu **II.C**, $U(x)$ commute avec $U(0)$ pour tout x , et est donc de la forme demandée. En outre,

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2 + \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^2 \iff \begin{cases} a' &= 1 + a^2 + b^2 \\ b' &= 2ab \end{cases}$$

On a alors $u' = 2a(u - 1)$ avec $u(0) = 1$ et donc $u = \frac{1}{1 + a^2}$. De cela suit $a' = 2(1 + a^2)$ avec $a(0) = 0$ et donc $a(x) = \operatorname{tg} 2x$ pour $x \in I$. De $b' = 2b \operatorname{tg} 2x$ et $b(0) = 1$ on déduit $b = \frac{1}{\cos 2x}$ pour $b \in I$. Comme intervalle I maximal, il est loisible de choisir $\left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[$ puisqu'aucun prolongement n'est possible en $\pm \frac{\pi}{4}$.