ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1987

MATHEMATIQUES I
(4 pages dactylographiées)

M

Définitions et notations

Dans ce problème, n est un entier strictement positif, $\mathcal{C}$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, E_n le sous-espace formé des éléments y de $\mathcal{C}$ qui sont de classe C^n et vérifient :

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

On notera $\mathcal{C}^*$ (resp : E_n^*) l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ (resp: de E_n) autres que la fonction nulle.

On munit $\mathcal{C}$, et donc aussi E_n, du produit scalaire défini par

$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$; la norme de f pour ce produit scalaire sera notée $N(f)$.

Pour simplifier les écritures, on pourra abréger $\int_0^1 f(t)dt$ en $\int_0^1 f$ lorsque cette notation ne créera pas d'ambiguïté.

But du problème

Un entier strictement positif n étant fixé, on se propose d'établir l'existence d'une plus petite constante positive A_n telle que, pour tout $y \in E_n$

$$(y|y^{(n)}) \leqslant A_n\,(y^{(n)}|y^{(n)})$$

et d'établir quelques résultats relatifs à la valeur de A_n.

NB : Les parties II et III sont indépendantes et peuvent être traitées en admettant les résultats de la partie I.

Première partie

I.1. Soit $f \in \mathcal{C}$: établir qu'il existe un élément g unique de E_n tel que $g^{(n)} = f$ et montrer que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$g(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$$

On pose alors $g = T_n(f)$, ce qui définit une application T_n de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, manifestement linéaire (inutile de le justifier); la notation $T_n(f)$ pourra être abrégée en T_nf lorsqu'il n'y aura pas risque de confusion.

I.2.a) Etablir que $\operatorname{Im} T_n = E_n$ et trouver $\operatorname{Ker} T_n$.

b) Montrer que T_n est continue (pour la norme définie dans le préambule) et donner une majoration de la norme de T_n; on rappelle que cette norme est

$$N(T_n) = \sup_{f \in \mathcal{C}^*} \frac{N(T_nf)}{N(f)}$$

I.3.a) Montrer que la quantité A_n définie dans le préambule existe, qu'elle est égale à $\sup\limits_{f \in \mathcal{C}^*} \dfrac{(f|T_nf)}{(f|f)}$ et qu'elle est majorée par $\dfrac{1}{(n-1)!}$

b) A l'aide d'un élément f de $\mathcal{C}^*$ très simple, établir que $A_n \geqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$

I.4. A tout $f \in \mathcal{C}$ on associe la fonction $U_n(f)$, notée aussi U_nf, définie par:

$$(U_nf)(x) = \int_x^1 \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

a) Etablir que U_nf est de classe C^n et donner sa dérivée n- ième.

b) $U_n(f)$ est donc un élément de $\mathcal{C}$, et l'on a ainsi défini une application U_n de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, visiblement linéaire (inutile de le justifier). Montrer que U_n est continue.

c) Etablir que, pour tout couple (f,g) d'éléments de $\mathcal{C}$:

$$(U_nf|g) = (f|T_ng)$$

I.5. Soit S_n l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ défini par $S_n = \frac{1}{2}(T_n+U_n)$

a) Etablir que, pour tout $f \in \mathcal{C}$ et tout $x \in [0,1]$

$$(S_nf)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt,$$ où S_nf désigne l'image de f par S_n.

b) Donner la dérivée n- ième de $S_n(f)$.

c) Comparer, f et g étant dans $\mathcal{C}$, $(S_nf|g)$ et $(f|S_ng)$.

d) Etablir : $A_n = \sup\limits_{f \in \mathcal{C}^*} \dfrac{(f|S_nf)}{(f|f)}$

Deuxième partie : étude du cas où n est impair

II.1. Etablir, pour tout $y \in E_1$, l'inégalité

$$\int_0^1 yy' \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 y'^2$$

Pour quels y de E_1 les deux membres sont-ils égaux?

Quelle est la valeur de A_1?

II.2. Dans cette question et la suivante, n est un entier impair au moins égal à 3. Pour tout entier naturel k, on note X^k l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^k. On désigne par P_n le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ engendré par $1\ (= X^0)$, X, X^2, $\dots$ X^{n-1}.

a) Etablir que $\operatorname{Im} S_n \subset P_n$. On précisera (sous forme d'intégrales) les coefficients du développement de $(S_nf)(x)$ selon les puissances de x.

b) Etablir que $\operatorname{Ker} S_n$ est l'orthogonal $P_n^\perp$ de P_n dans $\mathcal{C}$.

c) Etablir que $\mathcal{C} = P_n \oplus P_n^\perp$.

TOURNER LA PAGE

II.3. Soit σ_n l'application de P_n dans P_n qui à f associe $S_n f$.

a) σ_n est-elle un automorphisme?

b) Comparer Im S_n et P_n.

c) σ_n est-elle diagonalisable ? Comparer les valeurs propres de σ_n et celles de S_n.

d) Soit α_n la plus grande valeur propre de σ_n.
Montrer que, pour tout $g \in P_n$, $(g|\sigma_n\, g) \leqslant \alpha_n\, (g|g)$.
Pour quels g a-t-on l'égalité ? Quel est le signe de α_n ?

e) En déduire, à l'aide de II.2.c, que $A_n = \alpha_n$, qu'il existe dans E_n au moins un polynôme non nul y tel que $(y|y^{(n)}) = A_n\, (y^{(n)}|y^{(n)})$ et que tout élément de E_n vérifiant cette égalité est un polynôme.

II.4. On suppose, dans cette seule question, que n = 3. On admettra, ce qui est d'ailleurs immédiat, que 1, $X - \frac{1}{2}$, $(X - \frac{1}{2})^2$ constituent une base de P_3. Donner la matrice de σ_3 dans cette base; on mettra cette matrice sous la forme $\frac{1}{48}$ M, les coefficients de M étant tous des entiers relatifs à l'exception d'un seul. Déterminer A_3 et les éléments y de E_3 tels que $(y|y''') = A_3\, (y'''|y''')$.

Troisième partie : étude du cas n = 2

III.1. Montrer que Im S_2 est l'ensemble des éléments h de $\mathcal{C}$ qui sont de classe C^2 et vérifient de plus

$$h(0) + h(1) = - h'(0) = h'(1).$$

Déterminer Ker S_2.

III.2.a) Soit λ un réel strictement positif; on suppose qu'il existe f dans $\mathcal{C}^*$ tel que $S_2(f) = \lambda f$. Etablir :

$$\lambda f'' = f \quad ; \quad f \in \text{Im } S_2.$$

En déduire que $\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$ est racine de l'équation $x \text{ th } x = 1$.

b) Montrer que l'équation $x \text{ th } x = 1$ a une seule racine positive a et donner une valeur approchée à 0,01 près de $\frac{1}{4a^2}$.

c) Etablir que $\frac{1}{4a^2}$ est l'unique valeur propre strictement positive de S_2 et donner les vecteurs propres correspondants (on les mettra sous la forme $x \longmapsto \mu \text{ ch } (\nu x + \rho)$).

III.3. On donne $\omega > 0$, avec $\omega \neq 2a$; soit $\varphi \in \mathcal{C}^*$.

a) Montrer qu'il existe dans E_2 un élément ϕ et un seul tel que $\phi'' - \omega^2 \phi = \varphi$ et justifier la formule

$$\phi(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^x \text{sh}\,(\omega(x - t))\, \varphi(t)\, dt$$

pour tout $x \in [0,1]$. Donner une expression analogue pour $\phi'(x)$.

b) Etablir l'existence d'une constante K_ω ne dépendant que de ω, telle que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$|\phi(x)| \leqslant K_\omega . N(\varphi) \quad \text{et} \quad |\phi'(x)| \leqslant K_\omega . N(\varphi).$$

c) Etablir qu'il existe un élément unique z de Im S_2 tel que $z'' - \omega^2 z = \varphi$. On montrera que z peut être mis sous la forme

$$z(x) = \phi(x) + A \text{ ch } \omega x + B \text{ sh } \omega x$$

et l'on donnera un système d'équations déterminant A et B

d) Montrer qu'il existe deux constantes L_ω et M_ω, ne dépendant que de ω (ne pas chercher à les expliciter), telles que :

- pour tout $x \in [0,1]$, $\quad |z(x)| \leqslant L_\omega N(\varphi)$
- $\quad |N(z'')| \leqslant M_\omega N(\varphi)$

III.4. On donne encore $\omega > 0$, avec $\omega \neq 2a$; soit I l'application identique de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. Déduire de ce qui précède les résultats suivants :

a) $I - \omega^2 S_2$ est un automorphisme de $\mathcal{C}$.

b) L'automorphisme $(I - \omega^2 S_2)^{-1}$ est continu.

III.5. On suppose ici que $A_2 \neq \frac{1}{4a^2}$, et l'on pose $A_2 I - S_2 = H$.

a) f désignant un élément de $\mathcal{C}$, que dire du signe de $(f|Hf)$?

b) Montrer que l'application H^{-1} est continue; on désignera sa norme par β.

c) Soit $g \in \mathcal{C}$. En utilisant $g - \frac{1}{\beta} H^{-1}(g)$, établir l'inégalité

$$(g|Hg) \geqslant \frac{1}{\beta}\, (g|g).$$

d) Déduire de ce qui précède une contradiction. Quelle conclusion en tirer?

III.6. Soit $u \in \mathcal{C}^*$ tel que $(u|S_2\, u) = A_2\, (u|u)$.

En utilisant $v + \rho u$, où $v \in \mathcal{C}$ et $\rho \in \mathbb{R}$ sont quelconques, établir que $H(u) = 0$.

En déduire les fonctions $y \in E_2$ telles que

$$(y|y'') = A_2\, (y''|y'')$$

• • •
•