

Un corrigé du concours Centrale-supélec Math-II- 2015 Filière MP

Proposé par Mr : HAMANI Ahmed

I- Représentation intégrale de sommes de séries

I-A-

$$\text{I-A-1)} \quad \forall n \geq 2, a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ et par suite la série $\sum a_n$ converge comme celle de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$.

$$\text{I-A-2)} \quad \bullet - \text{La série } \sum a_n \text{ converge, soit } L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=2}^n a_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - 1 - \int_1^n \frac{dt}{t}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - 1 - \ln(n)),$$

ce qui entraîne que $H_n = \ln(n) + A + o(1)$ où $A = L + 1$.

$\bullet - A + o(1) = o(\ln(n))$, donc de l'égalité précédente, on obtient $H_n \sim \ln(n)$.

I-B- Par équivalence la série $\sum \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est de même nature que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^r}$.

- Si $r = 0$, alors $\sum \frac{\ln(n)}{n^r} = \sum \ln(n)$ diverge grossièrement.

- Si $r = 1$, alors $\frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente donc par comparaison, il en est de même pour la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$.

- Si $r \geq 2$, alors $n^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(n)}{n^r} = \frac{\ln(n)}{n^{r-\frac{3}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\frac{\ln(n)}{n^r} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, or $\frac{3}{2} > 1$, donc la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge et par comparaison, il en est de même pour la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^r}$.

On conclut par équivalence que la série $\sum \frac{H_n}{(n+1)^r}$ converge si, et seulement si, $r \geq 2$.

I-C-

$$\text{I-C-1)} \quad \forall t \in]-1, 1[, \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \text{ de rayon de convergence } R = 1.$$

$$\forall t \in]-1, 1[, \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \text{ de rayon de convergence } R = 1.$$

I-C-2) $\bullet -$ Les deux fonctions $-\ln(1-t)$ et $\frac{1}{1-t}$ sont développables en série entière sur $] -1, 1[$, donc le produit de Cauchy assure que leur produit $-\frac{\ln(1-t)}{1-t}$ est développable en série entière sur au moins $] -1, 1[$.

$$\bullet - \text{Posons } a_0 = 0, \forall n \geq 1, a_n = \frac{1}{n} \text{ et } b_n = 1, \text{ alors } \forall t \in]-1, 1[, -\frac{\ln(1-t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

$$\text{où } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n, \text{ donc}$$

$$\forall t \in]-1, 1[, -\frac{\ln(1-t)}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n$$

I-D-

I-D-1) - La fonction $t \mapsto t^p (\ln(t))^q$ est continue sur $]0, 1]$ et au voisinage de 0, $t^p (\ln(t))^q = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, donc la fonction $t \mapsto t^p (\ln(t))^q$ est intégrable sur $]0, 1]$.

I-D-2) - Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t \mapsto (\ln(t))^q$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, 1]$, ce qui permet une intégration par parties

$$I_{p,q}^\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \left(\frac{t^{p+1}}{p+1} \right)' (\ln(t))^q dt = \left[\frac{t^{p+1} (\ln(t))^q}{p+1} \right]_\varepsilon^1 - \frac{q}{p+1} \int_\varepsilon^1 t^p (\ln(t))^{q-1} dt = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^\varepsilon - \frac{\varepsilon^{p+1} (\ln(\varepsilon))^q}{p+1}$$

I-D-3) L'intégrale $\int_0^1 t^p (\ln(t))^{q-1} dt$ étant convergente, ce qui permet le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient l'égalité

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$$

I-D-4) La relation de récurrence qui précède conduit à

$$I_{p,q} = \frac{-q}{p+1} \frac{-(q-1)}{p+1} \dots \frac{-1}{p+1} I_{p,0} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^q} I_{p,0} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$$

I-E- Posons $f_n(t) = a_n t^n (\ln(t))^{r-1}$. Alors

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue intégrable sur $]0, 1[$.

- La série $\sum a_n t^n$ converge simplement sur $]0, 1[$, donc aussi $\sum a_n t^n (\ln(t))^{r-1}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(t)| dt = (r-1)! \frac{|a_n|}{(n+1)^r}$, donc la série $\sum \int_0^1 |f_n(t)| dt$ est convergente.

Le théorème de la convergence dominée est appliqué, ce qui permet de permuter intégrale et série

$$\int_0^1 (\ln(t))^{r-1} f(t) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n (\ln(t))^{r-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_{n,r-1} = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}$$

I-F- -

I-F-1) On pose $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n = -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$.

$r \geq 2$, donc d'après la question I-B, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est convergente, ce qui entraîne d'après la question précédente I-E

$$\int_0^1 (\ln(t))^{r-1} f(t) dt = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$$

$$\text{c'est à dire } S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln(t))^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt$$

I-F-2) On pose pour $t \in]0, 1[$ $u(t) = (\ln(t))^{r-1}$ et $v(t) = \frac{1}{2} (\ln(1-t))^2$.

- Au voisinage de 0, $u(t)v(t) \sim \frac{t^2}{2} (\ln(t))^{r-1} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$.

- Au voisinage de 1, $u(t)v(t) \sim \frac{(-1)^{r-1}}{2} (1-t)^{r-1} (\ln(1-t))^2 \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 0$.

Donc le crochet $[u(t)v(t)]_0^1$ est nul, ce qui donne par une intégration par parties

$$S_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 u(t)v'(t) dt = -\frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 u'(t)v(t) dt = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln(t))^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$$

I-F-3) En prenant $r = 2$ dans l'égalité précédente, on obtient $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln(1-t))^2}{t} dt$ et le changement de

variables $u = 1-t$ aboutit à l'égalité $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln(t))^2}{1-t} dt$ On pose $\forall t \in]-1, 1[$, $f(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$.

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^r}$ converge absolument, ce qui permet l'égalité de la question I-E en particulier avec $r = 3$ qui s'écrit

$$\int_0^1 \frac{(\ln(t))^2}{1-t} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = 2\zeta(3)$$

En conclusion $S_2 = \zeta(3)$.

II-La fonction β

II-A- - La fonction Γ

II-A-1) La fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Au voisinage de 0, $t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$, donc $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable au voisinage de 0 comme la fonction de Riemann grâce à la condition $1-x < 1$.

- Au voisinage de $+\infty$, $t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc par comparaison la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

On conclut que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x > 0$.

II-A-2) Le changement de variable $t = \alpha u$ dans l'expression de $\Gamma(x)$ donne $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \alpha^x \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-\alpha u} du$, donc cette dernière intégrale existe et on

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^x} \Gamma(x)$$

II-B- La fonction β et son équation fonctionnelle

II-B-1) La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1[$.

- Au voisinage de 0, elle est équivalente à t^{x-1} , donc intégrable au voisinage de 0 grâce à la condition $x > 0$.

- Au voisinage de 1, elle est équivalente à $(1-t)^{y-1}$, donc elle est intégrable au voisinage de 1 grâce à la condition $y > 0$.

En conclusion $\beta(x, y)$ existe pour tous $x > 0, y > 0$.

II-B-2) Le changement de t en $1-t$, entraîne que $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

II-B-3) $\forall x > 0, y > 0$, alors $x+1 > 1$, ce qui assure l'existence de $\beta(x+1, y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt$.

Pour le calcul de $y\beta(x+1, y)$, on pose $u(t) = t^x$ et $v(t) = -(1-t)^y$, alors le crochet $[u(t)v(t)]_0^1$ est nul, ce qui permet une intégration par parties

$$y\beta(x+1, y) = \int_0^1 u(t)v'(t) dt = x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = x\beta(x, y+1)$$

or $t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y = t^{x-1}(1-t)^{y-1}(t+1-t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$, donc

$\beta(x+1, y) + \beta(x, y+1) = \beta(x, y)$, ce qui donne avec $y\beta(x+1, y) = x\beta(x, y+1)$ l'égalité $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\beta(x, y)$.

II-B-4) De l'égalité précédente, on obtient en remplaçant y par $y+1$, $\beta(x+1, y+1) = \frac{x}{x+y+1}\beta(x, y+1)$

et en inversant les rôles, $\beta(y+1, x) = \frac{y}{x+y}\beta(y, x)$, donc par symétrie de β , on aura $\beta(x, y+1) = \frac{y}{x+y}\beta(x, y)$, et en remplaçant cette dernière dans l'égalité $\beta(x+1, y+1) = \frac{x}{x+y+1}\beta(x, y+1)$, on obtient

$$\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)$$

II-C- Relation entre la fonction β et la fonction Γ

II-C-1) Supposons que la relation (R) est vraie pour $x > 1, y > 1$ et soit $x > 0, y > 0$, alors $x+1 > 0, y+1 > 0$,

$$\text{donc } \beta(x+1, y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} = \frac{xy\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)}$$

et par l'égalité précédente, on aura $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

II-C-2) On effectue le changement de variable $t = \frac{u}{1+u}$, alors $dt = \frac{1}{(1+u)^2} du = \frac{du}{(1+u)^2}$ et par suite

$$\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{y-1} \frac{du}{(1+u)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$$

II-C-3) La condition $x > 1, y > 1$ entraîne que $x+y-1 > 1$, ce qui assure l'existence de $\Gamma(x+y)$.

La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ est continue positive, donc $F_{x,y} : t \mapsto \int_0^t e^{-u}u^{x+y-1} du$ est croissante sur \mathbb{R}^+ , et par suite $t > 0, F_{x,y}(t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} F_{x,y}(t) = \Gamma(x+y)$.

II-C-4) On pose $g(a, u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)$.

$\forall a \in \mathbb{R}^+, g$ est continue $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par opérations sur les fonctions continues.

$\forall (a, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, 0 \leq g(a, u) \leq \Gamma(x+y) \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}$, cette fonction dominante est indépendante de a et continue intégrable d'après II-C-2).

- On conclut la définition et la continuité de G sur \mathbb{R}^+ , par le th éorème de continuité sous le signe intégral.

II-C-5) $\forall a \geq 0, u \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$\forall u \in]0, +\infty[, \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$ qui est continue sur \mathbb{R}^{*+} .

$\forall a \geq 0, \forall u > 0 \left| \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a) \right| \leq \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$ et la fonction dominante est selon II-C-2), continue intégrable sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de la convergence dominée généralisé permet d'invertir limite et intégrale et on aura

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y) du = \Gamma(x+y)\beta(x, y)$$

II-C-6) On pose $\forall (a, u) \in \mathbb{R}^{**} \times \mathbb{R}^{**}$, $g(a, u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)$.

- On a déjà $\forall a \in \mathbb{R}^{**}$, $u \mapsto g(a, u)$ est continue intégrable sur \mathbb{R}^{**} .

- La fonction g admet une dérivée partielle par rapport à a et on a

$(a, u) \mapsto \frac{\partial g}{\partial a}(a, u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y-1}} e^{-(1+u)a} ((1+u)a)^{x+y-1} = a^{x+y-1} u^{x-1} e^{-(1+u)a}$ est continue par rapport aux deux variables.

- $\forall (a, u) \in [c, d] \times \mathbb{R}^{**}$, $|\frac{\partial g}{\partial a}(a, u)| \leq d^{x+y-1} u^{x-1} e^{-(1+u)c} = \varphi(u)$.

La fonction dominante φ est continue sur \mathbb{R}^{**} intégrable selon II - A - 2).

On conclut par le théorème de Leibniz la classe C^1 de G sur $[c, d]$.

Soit $a \in \mathbb{R}^{**}$, alors $\exists c, d > 0$ tel que $a \in [c, d]$, donc G est dérivable en a , ce qui entraîne que G est de classe C^1 en tout point de \mathbb{R}^{**} .

II-C-7) $\forall a > 0$, $G'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial a}(a, u) du = a^{x+y-1} e^{-a} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-ua} du$, or d'après II-A-2), $\int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-ua} du = \frac{\Gamma(x)}{a^x}$ donc

$$\forall a > 0, G'(a) = a^{y-1} e^{-a} \Gamma(x)$$

II-C-8) De l'égalité précédente, et en exploitant que G est continue en 0 avec $G(0) = 0$, on aura $\forall a > 0$, $G(a) =$

$$G(0) + \Gamma(x) \int_0^a t^{y-1} e^{-t} dt = \Gamma(x) \int_0^a t^{y-1} e^{-t} dt.$$

En tendant a vers $+\infty$, on obtient avec la question II - C - 5)

$$\forall a > 0, \Gamma(x+y) \beta(x, y) = \Gamma(x) \Gamma(y)$$

III- La fonction digamma

III-A- $\forall x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x) = (\ln(\Gamma(x+1)))' - (\ln(\Gamma(x)))' = (\ln(\Gamma(x+1)) - \ln(\Gamma(x)))' =$
 $= \left(\ln \left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} \right) \right)' = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

III-B- Sens de variation de ψ

III-B-1) • - $\forall x > 0$, la fonction $y \mapsto \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ est dérivable sur \mathbb{R}^{**} , ce qui justifie l'existence de $\frac{\partial \beta}{\partial y}$ sur $(\mathbb{R}^{**})^2$.

• - $\forall x > 0, y > 0$ $\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \Gamma(x) \left(\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(x+y)} - \frac{\Gamma(y) \Gamma'(x+y)}{\Gamma^2(x+y)} \right) = \beta(x, y) (\psi(y) - \psi(x+y))$.

III-B-2) On va appliquer le théorème de Leibniz à $y \mapsto \beta(x, y) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ pour montrer qu'elle est de classe C^1 .

- Soit $x > 0$ fixé.

- $\forall y > 0$, $t \mapsto t^{x-1} (1-t)^{y-1}$ est continue intégrable sur $]0, 1[$ selon II - B - 1).

- $(y, t) \mapsto \frac{\partial}{\partial y} (t^{x-1} (1-t)^{y-1}) = \ln(1-t) t^{x-1} (1-t)^{y-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^{**} \times]0, 1[$.

- Soit $a > 0$, alors $\forall (y, t) \in [a, +\infty[\times]0, 1[$, $\left| \frac{\partial t^{x-1} (1-t)^{y-1}}{\partial y} \right| \leq |\ln(1-t)| t^{x-1} (1-t)^{a-1} = \varphi(t)$.

La fonction dominante est continue sur $]0, 1[$ et $\varphi(t) \sim t^x = o(1)$ et $\varphi(t) \sim (1-t)^{a-1} |\ln(1-t)| =$

$o\left(\frac{1}{(1-t)^{\frac{2-a}{2}}}\right)$, donc elle est intégrable sur $]0, 1[$.

On conclut par le théorème de Leibniz que $\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \int_0^1 \ln(1-t) t^{x-1} (1-t)^{1-t} dt$, donc de signe négatif strict et par suite $y \mapsto \beta(x, y)$ est décroissante sur \mathbb{R}^{**} .

III-B-3) De l'égalité $\forall x > 0, y > 0$ $\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \beta(x, y) (\psi(y) - \psi(x+y))$ on obtient

$\forall x > 0, y > 0$, $\psi(y) - \psi(x+y) < 0$, donc ψ est croissante sur \mathbb{R}^{**} .

III-C- Une expression de ψ comme somme d'une série de fonctions

III-C-1) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors en appliquant l'égalité de III - A) à $k+x$ et à k , on obtient

$\psi(k+x+1) - \psi(k+x) = \frac{1}{k+x}$ et $\psi(k+1) - \psi(k) = \frac{1}{k}$, donc

$$(\psi(k+1) - \psi(k+x+1)) - (\psi(k) - \psi(k+x)) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$$

ce qui donne par télescopage que $(\psi(n+1) - \psi(n+x+1)) - (\psi(1) - \psi(1+x)) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$

c'est à dire $\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$.

III-C-2) Par définition de p , on a $p-1 \leq x < p$, donc $n+p \leq n+x+1 < n+p+1$ et par croissance de ψ
 $\psi(n+p) \leq \psi(n+x+1) \leq \psi(n+p+1)$ et par suite

$$0 \leq \psi(n+p) - \psi(n) \leq \psi(n+x+1) - \psi(n) \leq \psi(n+p+1) - \psi(n) = \sum_{k=n}^{n+p} (\psi(k+1) - \psi(k)) = \\ = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} = H_{n+p} - H_{n-1} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{n+p} 1 = \frac{p+1}{n}$$

III-C-3) - La série $\sum_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ converge, de plus de l'inégalité précédente on obtient

$$\psi(n+x+1) - \psi(n+1) = (\psi(n+x+1) - \psi(n)) + (\psi(n) - \psi(n+1)) - \psi(n+x+1) - \psi(n) - \frac{1}{n} \\ \text{donc } -\frac{1}{n} \leq \psi(n+x+1) - \psi(n+1) \leq \frac{p+1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{p}{n}. \\ \text{ceci entraîne que } \psi(n+x+1) - \psi(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et Le passage à la limite } n \rightarrow +\infty \text{ dans l'égalité}$$

de III - C - 1) donne

$$\forall x > -1, \psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

III-D- Un développement en série entière

III-D-1) On pose $\forall n \geq 2, \forall x > -2, g_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

- $\forall n \geq 2$, les fonctions g_n sont de classe C^∞ sur $] -2, +\infty[$ et on a $\forall x > -2, \forall n \geq 2, \forall k \in \mathbb{N}^*$,
 $g_n^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{k!}{(n+x)^{k+1}}$.

- La série $\sum_{n \geq 2} g_n$ converge simplement sur $] -2, +\infty[$.

- $\forall x > -2, \forall n \geq 2, \forall k \in \mathbb{N}^*$, $|g_n^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{(n-1)^{k+1}}$ et le terme dominant est indépendant de x et c'est celui d'une série convergente vers $k! \zeta(k+1)$.

On conclut par le théorème de dérivation sous le signe \sum que g est de classe C^∞ sur $] -2, +\infty[$ et en particulier sur $] -1, +\infty[$, et on a $\forall x > -2, \forall k \in \mathbb{N}^*$, $g^{(k)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} g_n^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} k! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}}$, donc

$$g^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} k! (\zeta(k+1) - 1)$$

III-D-2) • g étant de classe C^∞ sur $] -1, 1[$, on lui applique la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et x , ce qui donne l'existence de c entre 0 et x tel que $0 < |c| < |x|$ avec $g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(c)$.

or $c \in] -1, 1[$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(p+c)^{n+2}} \leq \frac{1}{(p-1)^2}$, ce qui entraîne que

$$|g^{(n+1)}(c)| = (n+1)! \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{(p+c)^{n+2}} \leq (n+1)! \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{(p-1)^2} \leq (n+1)! \zeta(2) \text{ et par suite}$$

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} |g^{(n+1)}(c)| \leq |x|^{n+1} \zeta(2)$$

• $\forall x \in] -1, 1[$, $|x|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc l'inégalité précédente assure le développement en série entière de g sur $] -1, 1[$ et on a vu que $g(0) = 0$

$$\forall x \in] -1, 1[, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n! (\zeta(n+1) - 1)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (\zeta(n+1) - 1) x^n$$

III-D-3) $\forall x \in] -1, 1[, \psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) = \psi(1) + g(x) - \left(\frac{1}{1+x} - 1 \right)$, or

$$\frac{1}{1+x} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (\zeta(n+1) - 1) x^n, \text{ donc}$$

$$\forall x \in] -1, 1[, \psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (\zeta(n+1) - 1 + 1) x^n = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \zeta(n+1) x^n.$$

IV- Une expression de S_r en fonction de valeurs entières de ζ

IV-A— Une relation entre B et ψ

• $\forall x > 0, \beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, donc $y \mapsto \beta(x, y)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^{**} , ce qui justifie la définition de B.

• En dérivant par rapport à y la relation de III – B – 1), on obtient

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y)(\psi(y) - \psi(x+y)) + \beta(x, y)(\psi'(y) - \psi'(x+y))$$

or $\beta(x, 1) = \frac{1}{x}$ et $\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \beta(x, y)(\psi(y) - \psi(x+y))$, donc avec $y = 1$ on obtient

$$\forall x > 0, \quad xB(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))^2 - (\psi'(1) - \psi'(1+x))$$

$\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ et Γ est de classe C^∞ , donc ψ est de classe C^∞ et par suite B l'est aussi comme produit de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et la fonction $x \mapsto (\psi(1+x) - \psi(1))^2 - (\psi'(1) - \psi'(1+x))$.

IV-B— Expression de S_r à l'aide de la fonction B

IV-B-1) Montrons que $y \mapsto \beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. Posons pour $x > 0$

fixé, $\forall y > 0, \forall t \in]0, 1[, h(y, t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$

- $\forall y > 0$, la fonction $t \mapsto h(y, t)$ est continue intégrable sur $]0, 1[$.

- Les fonctions $(y, t) \mapsto \frac{\partial h}{\partial y}(y, t)$ et $(y, t) \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y, t)$ sont continues sur $]0, +\infty[\times]0, 1[$.

- Soit $c > 0$.

- $\forall (y, t) \in [c, +\infty[\times]0, 1[, |\frac{\partial h}{\partial y}(y, t)| = |-\ln(1-t)h(y, t)| \leq |\ln(1-t)|t^{x-1}(1-t)^{c-1}$ et

$$|\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y, t)| = |(\ln(1-t))^2 h(y, t)| \leq (\ln(1-t))^2 t^{x-1}(1-t)^{c-1}.$$

or pour $k = 1, 2, |(\ln(1-t))^k t^{x-1}(1-t)^{c-1}| \sim t^{k+x-1} = o(1)$ et $|(\ln(1-t))^k t^{x-1}(1-t)^{c-1}| \sim 1$

$|(\ln(1-t))^k|(1-t)^{c-1} = o(1)$ donc les fonctions dominantes sont continues intégrables.

On conclut par le théorème de Leibniz que $y \mapsto \beta(x, y)$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et on a $\forall y >$

$0, \forall x > 0, \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, y) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$, ce qui entraîne qu'en particulier en $y = 1$,

$$B(x) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1} dt$$

IV-B-2) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout réel $x > 0, B^{(p)}(x) = \int_0^1 \ln^p(t)(\ln(1-t))^2 t^{x-1} dt$.

IV-B-3) D'après I – F – 2), $\forall r \geq 2, S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln(t))^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$.

• Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} B^{r-2}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 (\ln(t))^{r-2} (\ln(1-t))^2 t^{x-1} dt = \int_0^1 \frac{(\ln(t))^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$.

On pose $\forall t \in]0, 1[, \forall x > 0, b(x, t) = (\ln(t))^{r-2} (\ln(1-t))^2 t^{x-1}$

- $\forall t \in]0, 1[, \lim_{x \rightarrow 0^+} b(x, t) = \frac{(\ln(t))^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} = c(t)$.

La fonction c est continue intégrable sur $]0, 1[$.

- $\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times]0, 1[, |b(x, t)| \leq c(t)$.

Le théorème de la convergence dominée généralisé permet d'invertir limite et intégral, ce qui donne

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} B^{r-2}(x) = \int_0^1 c(t) dt = \int_0^1 \frac{(\ln(t))^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$$

et par suite $\forall r \geq 2, S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \lim_{x \rightarrow 0^+} B^{r-2}(x)$.

IV-B-4) • En particulier pour $r = 2$, on obtient $S_2 = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} B(x) = \int_0^1 \frac{(\ln(1-t))^2}{t} dt$ et le changement

$u = 1 - t$ aboutit à $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln(t))^2}{1-t} dt$.

• L'égalité de IV – A, $\forall x > 0, B(x) = \frac{1}{x} ((\psi(1+x) - \psi(1))^2 - (\psi'(1+x) - \psi'(1)))$.

et d'après III – D – 3) $\psi(1+x) - \psi(1) = \zeta(2)x + o(x)$, donc $(\psi(1+x) - \psi(1))^2 = o(x)$ et en dérivant la formule de III – D – 3) en obtient

$\psi'(1+x) - \psi'(1) = -\zeta(3)x$, donc $B(x) = \zeta(3) + o(1)$ et par suite $S_2 = \lim_{x \rightarrow 0} B(x) = \zeta(3)$.

IV-C— .

IV-C-1) • - D'après III – C – 3) et III – D) on a $\forall x > -1$ $\psi(1+x) = \psi(1) + 1 - \frac{1}{1+x} + g(x)$.

or d'après II – D – 1), la fonction g est de classe C^∞ et de même pour $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, donc $x \mapsto \psi(1+x)$ est de classe C^∞ .

• - La question III – D – 3), la fonction $x \mapsto \psi(1+x)$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$, donc elle coïncide avec sa série de Fourier.

$\forall x \in] -1, 1[$, $\psi(1+x) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\psi^{(k)}(1)}{k!} x^k$, donc par produit de Cauchy, on obtient

$$\forall x \in] -1, 1[, (\psi(1+x) - \psi(1))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \text{ avec } c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\psi^{(k)}(1)}{k!} \frac{\psi^{(n-k)}(1)}{(n-k)!}.$$

• De même $\forall x \in] -1, 1[$, $\psi'(1+x) - \psi'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi^{(n+1)}(1)}{n!} x^n$, ce qui entraîne que

$\forall x \in] -1, 1[$, $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n - \frac{\psi^{(n+1)}(1)}{n!} \right) x^n$. On obtient donc par unicité du développement

$$\varphi^{(n)}(0) = n! \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\psi^{(k)}(1)}{k!} \frac{\psi^{(n-k)}(1)}{(n-k)!} - \frac{\psi^{(n+1)}(1)}{n!} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \psi^{(k)}(1) \psi^{(n-k)}(1) - \psi^{(n+1)}(1)$$

IV-C-2) La formule de Leibniz entraîne

$\forall x > 0, \forall r \geq 3$, $(\varphi)^{(r-1)}(x) = (xB(x))^{(r-1)} = xB^{(r-1)}(x) + (r-1)B^{(r-2)}(x)$ et par passage à la limite en 0 donne

$$\varphi^{(r-1)}(0) = (r-1) \lim_{x \rightarrow 0} B^{(r-2)}(x), \text{ donc } 2S_r = \frac{(-1)^r}{(r-2)!} \frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{r-1} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \varphi^{(r-1)}(0)$$

or $\frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} = \sum_{k=1}^{r-2} \frac{\psi^{(k)}(1)}{k!} \frac{\psi^{(r-1-k)}(1)}{(r-1-k)!} - \frac{\psi^{(r)}(1)}{(r-1)!}$ et d'après III – D – 3),

$\forall k \geq 1$, $\frac{\psi^{(k)}(1)}{k!} = (-1)^{k+1} \zeta(k+1)$, donc

$$2S_r = (-1)^r \left(\sum_{k=1}^{r-2} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) (-1)^{r-k} \zeta(r-k) - (-1)^{r+1} r \zeta(r+1) \right) = r \zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1) \zeta(r-k)$$