

Concours Banque PT 2017 Mathématiques C

Préambule

- Soient a et b deux réels distincts. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$
- Supposons l'intervalle I non réduit à un point. Pour tout réel x distinct de x_0 , f étant dérivable donc continue sur $[x, x_0]$, il existe un réel c_{x, x_0} compris entre x et x_0 tel que $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_{x, x_0})$
- Plaçons-nous dans le cas où $x < x_0$. Comme f' est supposée strictement croissante, $f'(x) < f'(c_{x, x_0}) < f'(x_0)$. Ceci nous permet d'écrire que :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_{x, x_0}) < f'(x_0) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) - f(x_0) > f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

car $x - x_0 < 0$. On a donc bien $f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) > 0$

- Un raisonnement analogue nous permet d'obtenir le même résultat pour $x > x_0$.
- La fonction f étant dérivable en x_0 , sa courbe représentative admet une tangente au point d'abscisse x_0 d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
- Un point de coordonnées (x, y) appartenant à cette tangente vérifiera, d'après les inégalités précédentes, $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) < f(x)$. Cela signifie que la tangente est située en dessous de la courbe. Le raisonnement étant valable quel que soit $x_0 \in I$, la courbe représentative de f est située au-dessus de toutes ses tangentes. La fonction f est alors qualifiée de *convexe*.

Partie I

- Soit $x \geq 0$.
 - La fonction $t \mapsto e^{-t} t^x$ est continue sur $]0, +\infty[$; l'intégrale est doublement impropre.

- Problème de convergence en 0.
 $e^{-t} t^x = e^{-t} e^{x \ln(t)}$ admet une limite finie en 0 puisque $x \geq 0$, l'intégrale est donc faussement impropre en 0.
- Problème de convergence en $+\infty$.
Par croissance comparée, $e^{-t} t^{x+2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ car $x + 2 > 0$ donc

$$e^{-t} t^x \underset[t \rightarrow +\infty]{}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Ceci suffit à justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ pour tout $x \geq 0$

$$2. \quad G(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = 1$$

- On a $G(1/2) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt$. Soient a et b deux réels strictement positifs. Commençons par effectuer une intégration par parties, les fonctions considérées étant de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

$$\int_a^b \sqrt{t} e^{-t} dt = \left[-\sqrt{t} e^{-t} \right]_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}} dt$$

Un bref passage à la limite nous permet d'écrire, par croissance comparée, que :

$$G(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}} dt$$

Il ne reste plus qu'à effectuer le changement de variable $u = \sqrt{t}$, de classe \mathcal{C}^1 et bijectif sur $]0, +\infty[$, pour obtenir

$$G(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- Soit A un réel strictement positif.
 - Soient $t > 0$ et $x \in [0, A]$. Par définition, $t^x = e^{x \ln(t)}$. On a donc :

$$t^x \leq \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1 \\ t^A & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Ainsi, $t^x \leq \max(1, t^A) \leq 1 + t^A$. Comme $e^t > 0$, $|e^{-t} t^x| \leq (1 + t^A) e^{-t}$

b) Appliquons le théorème de continuité sous le signe \int .

Posons pour cela $f(x, t) = t^x e^t$.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, A]$.
- Pour tout $x \in [0, A]$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Hypothèse de domination
D'après la question précédente,

$$\forall (x, t) \in [0, A] \times \mathbb{R}_+^*, \quad |f(x, t)| \leq (1 + t^A)e^{-t} = \varphi(t)$$

Observons que la fonction φ est bien intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque $A \geq 0$ et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On a bien justifié la continuité de f sur $[0, A]$, et par extension, sur $[0, +\infty[$

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , G est de classe \mathcal{C}^n sur $[0, A]$ et que :

$$\forall x \in [0, A] \quad G^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^n(t) t^x e^{-t} dt \quad (*)$$

► **Initialisation** – C'était l'objet de la question précédente, G est bien de classe \mathcal{C}^0 sur l'intervalle $[0, A]$.

► **Hérédité** – Supposons maintenant que G est de classe \mathcal{C}^n sur $[0, A]$ et que l'égalité (*) est vérifiée. Montrons que $G^{(n+1)}$ est de classe \mathcal{C}^1 , en appliquant le théorème de Leibniz.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[0, A]$ et,

$$\forall (x, t) \in [0, A] \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(x, t) = \ln^{n+1}(t) t^x e^{-t}$$

- Pour tout $x \in [0, A]$, $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(x, t)$ sont continues et $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* puisque par croissance comparée :

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = \ln^n(t) t^x e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

- Hypothèse de domination

$$\forall (x, t) \in [0, A] \times \mathbb{R}_+^*, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq (1 + t^A) \ln^k(t) e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Ceci montre que G est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[0, A]$ et l'égalité (*) est vérifiée au rang $n+1$, ce qui achève notre raisonnement par récurrence.

On a bien démontré que G est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, A]$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0, A] \quad G^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^n(t) t^x e^{-t} dt$$

d) La propriété précédente étant vraie quel que soit $A \geq 0$, G est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+ et on peut même écrire que :

$$\forall x \geq 0 \quad G^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^n(t) t^x e^{-t} dt$$

5. Soit $x \geq 0$. Effectuons une intégration par parties sur le segment $[a, b]$ avec $a, b > 0$, les fonctions considérées étant de classe \mathcal{C}^1 . On a :

$$\int_a^b t^{x+1} e^{-t} dt = \left[-t^{x+1} e^{-t} \right]_{t=a}^{t=b} + (x+1) \int_a^b t^x e^{-t} dt$$

Toujours par croissance comparée, en passant à la limite, on obtient directement l'égalité $G(x+1) = (x+1)G(x)$

6. En appliquant cette identité à un entier naturel n , on obtient $G(n+1) = (n+1)G(n)$, ce qui conduit, par récurrence, à :

$$G(n) = nG(n-1) = n(n-1)G(n-2) = \dots = n(n-1) \dots 1 \cdot G(0) = n!$$

On a donc $G(n) = n!$

7. Posons $\tilde{G}(x) = \frac{G(x+1)}{x+1}$ pour tout $x > -1$. D'après la question 5, $\tilde{G}(x) = G(x)$ pour tout $x \geq 0$. \tilde{G} étant le quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas, \tilde{G} est donc bien elle-même de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$

8. G étant continue en 0, $G(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} G(0) = 1$ donc $\tilde{G}(x) = \frac{G(x+1)}{x+1} \underset{x \rightarrow -1^+}{\sim} \frac{1}{x+1}$

9. On obtient en dérivant successivement,

$$\forall x > -1, \quad (x+1)^3 \tilde{G}''(x) = (x+1)^2 G''(x+1) - 2(x+1)G'(x+1) + 2G(x+1)$$

La question 4.d) nous permet alors d'écrire :

$$(x+1)^3 \tilde{G}''(x) = \int_0^{+\infty} [(x+1)^2 \ln^2(t) - 2(x+1)\ln(t) + 2] t^{x+1} e^{-t} dt$$

10. Cette dernière intégrale peut se réécrire sous la forme :

$$\int_0^{+\infty} [X^2 - 2X + 2] t^{x+1} e^{-t} dt \quad \text{en posant } X = (x+1)\ln(t)$$

Le discriminant de $X^2 - 2X + 2$ étant strictement négatif, ce trinôme est de signe constant. Il suffit d'évaluer en $X = 0$ pour voir que le signe est positif. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que \tilde{G}'' est positive. Elle est même strictement positive du fait que si f est continue et positive sur I ,

$$\int_I f(t) dt = 0 \iff \forall t \in I \quad f(t) = 0$$

Ainsi, $\tilde{G}''(x) > 0$ pour tout $x > -1$

11. \tilde{G}' étant ainsi strictement croissante, les résultats du préambule nous permettent de justifier que le graphe de \tilde{G} est au-dessus de chacune de ses tangentes

12. Comme $G(n) = n!$ pour tout entier naturel n , $\tilde{G}(0) = \tilde{G}(1) = 1$. Ce qui nous permet d'appliquer le théorème de Rolle (la dérivabilité étant assurée sur $] -1, +\infty[$) ! On justifie ainsi l'existence d'une tangente horizontale en un point d'abscisse c compris entre 0 et 1.

13. \tilde{G}' étant strictement croissante et s'annulant en c , les variations de \tilde{G} sont immédiates :

x	-1	c	$+\infty$
$\tilde{G}'(x)$		0	$+$
$\tilde{G}(x)$	$+\infty$	$\tilde{G}(c) \approx 0,89$	$+\infty$

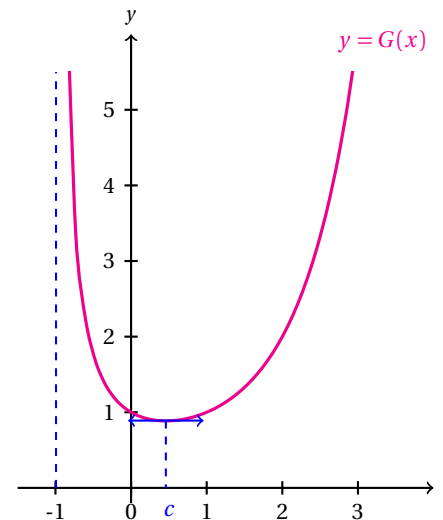
Précisons le calcul des limites :

- $\tilde{G}(x) \underset{x \rightarrow -1^+}{\sim} \frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} +\infty.$

- Par croissance de G , en posant $n = \lfloor x \rfloor$, on a $G(x) \geq G(n) = n!$.

Donc $\frac{G(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui nous assure que $\tilde{G}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$

14. Il ne reste plus qu'à tracer le graphe de \tilde{G} , sachant que $\tilde{G}(0) = \tilde{G}(1) = 1$.



REPRÉSENTATION DE $\Gamma_{\tilde{G}}$

Notons que $\Gamma_{\tilde{G}}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$ puisque $\tilde{G}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} +\infty.$

On pourrait par ailleurs vérifier que :

$$\frac{\tilde{G}(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui permettrait de justifier l'existence d'une branche parabolique de direction l'axe (Oy) . Il suffit pour cela d'employer le même argument qu'à la question 13.

Partie II

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt.$

1. La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est une primitive de $x \mapsto e^{t^2}$. Elle est donc dérivable sur \mathbb{R}_+ . Dès lors, F l'est également comme produit de fonctions dérivables.

On a donc :

$$\forall x \geq 0, \quad F'(x) = 1 - 2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

2. F est développable en série entière sur \mathbb{R} comme produit de fonctions développables en série entière, via un produit de Cauchy de séries absolument conver-

gentes. En effet, pour tout réel x ,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}; \quad \int_0^x e^{t^2} dt = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

par intégration terme à terme.

3. F est bien solution de l'équation différentielle $y' = 1 - 2xy$ d'après la question 1.

4. Posons $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Par dérivation terme à terme,

$$\begin{aligned} F'(x) + 2xF(x) = 1 &\iff \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1 \\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 1 \\ &\iff a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1) a_{n+1} + 2a_{n-1}] x^n = 1 \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\boxed{a_1 = 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0}$$

5. La relation précédente nous permet d'écrire, en distinguant les cas pairs et impairs :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2p} = -\frac{2}{2p} a_{2p-2}; \quad a_{2p+1} = -\frac{2}{2p+1} a_{2p-1}}$$

6. Remarquons que $F(0) = a_0 = 0$. Donc, par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$. Il ne reste plus qu'à déterminer les termes d'indices impairs. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{2p+1} = -\frac{2}{2p-1} a_{2p-1} = \frac{4}{(2p+1)(2p-1)} a_{2p-3} = \dots = \frac{(-1)^p 2^p}{(2p+1)(2p-1)\dots 1} a_1$$

Ainsi, $\boxed{a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^p}{(2p+1)(2p-1)\dots 1} = \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}}$ On a dès lors :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad F(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}}$$

7. Posons $u_n = \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}$. Montrons que la série $\sum u_n$ converge absolument à l'aide de la règle de d'Alembert.

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{4^{n+1}(n+1)!}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{4^n n!} = \frac{4(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{2}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

Ce qui permet de conclure.

8. Revenons au produit de Cauchy effectué dans la question 2. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!(2k+1)} x^{2(n-k)} x^{2k+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \right] x^{2n+1} \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, grâce au résultat de la question 6.,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^n}{n!} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \right] = \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}$$

Autrement dit, pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} = \frac{4^n n!^2}{(2n+1)(2n)!} = \frac{4^n}{(2n+1) \binom{2n}{n}}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE