

PARTIE I

I.A. $A = PBP^{-1}$

I.B. En utilisant : $R = Q^{-1}$

I.C. Toutes les matrices Q_i sont inversibles soit par hypothèse, soit comme conséquence de leur définition.

Alors si : $A = Q_1 B Q_1^{-1}$ et $B = Q_2 C Q_2^{-1}$
 donc : $A = (Q_1 Q_2) C (Q_2^{-1} Q_1^{-1}) = Q_3 C Q_3^{-1}$ avec $Q_3 = Q_1 Q_2$
 Puis ; ${}^t A = Q_4 {}^t B Q_4$ avec $Q_4 = {}^t(Q_1^{-1})$

I.D.1) Si A est diagonale on : $A = {}^t A$. Les matrices sont donc semblables (avec $Q = Id$)

I.D.2) A est semblable à une matrice diagonale A' et ${}^t A$ est semblable à la matrice diagonale ${}^t A'$ en utilisant **I.C**), donc ${}^t A$ et ${}^t B$ sont semblables.

PARTIE II

II.A. Effectuons le produit de matrices : ${}^t A P = P A$ pour obtenir le système : $(b, c) \neq (0, 0)$ (matrice non diagonale)

$$\begin{cases} ax + cz = ax + cy \\ bx + dz = az + ct \\ ay + ct = bx + dy \\ by + dt = bz + dt \end{cases} \iff \begin{cases} c(z - y) = 0 \\ bx + dy = az + ct \\ ay + ct = bx + dy \\ b(y - z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ bx + (d - a)y - ct = 0 \end{cases}$$

II.B. En choisissant $t = 0$ et $x = (d - a)$ on a : $y = z = -b$ et la matrice P_1
 En choisissant $t = (d - a)$ et $x = 0$ on a : $y = z = c$ et la matrice P_2

$$P_1 = \begin{pmatrix} d - a & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & d - a \end{pmatrix}$$

det $P_1 = -b^2$ et det $P_2 = -c^2$ prouve que l'une au moins de ces matrices P est inversible.

II.C. Alors ${}^t A P = P A \iff {}^t A = P A P^{-1}$ donc : A et ${}^t A$ sont semblables.

PARTIE III

III.A.1) Une fonction polynomiale de degré impair est une fonction continue sur \mathbb{R} qui change de signe puisque les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont de signes opposés. Elle possède donc au moins une racine sur \mathbb{R} d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

III.A.2) Une matrice et sa transposée ont même déterminant, donc pour les polynômes caractéristiques :

$$\det(A - \lambda I) = \det({}^t(A - \lambda I)) = \det({}^t A - \lambda I)$$

Les matrices A et ${}^t A$ ont même polynôme caractéristique.
 Ce polynôme est ici du troisième degré : il possède une racine réelle.

III.A.3) La stabilité de la droite engendrée par \vec{i} , ($\vec{i} \neq \vec{0}$) équivaut à $f(\vec{i})$ et \vec{i} sont colinéaires, propriété de définition de : \vec{i} est un vecteur propre pour f .

En outre f possède au moins une valeur propre réelle (la racine du polynôme caractéristique) et le sous espace propre associé est au moins de dimension 1. et toute droite d'un sous espace propre est stable.

III.A.4) $({}^t A - aI) = ({}^t(A - aI))$ donc pour tout déterminant d'une matrice extraite de l'une des matrices on trouve le déterminant de même valeur de la matrice transposée extraite dans l'autre. Les deux matrices sont de même rang. F et H sont respectivement les sous espaces solutions des systèmes $(A - aI)X = 0$ et $({}^t A - aI)X = 0$. donc F et H ont même dimension.

III.A.5) question de cours : $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x - 3y_3 = {}^t X Y$

$$(f(\vec{x})) \cdot \vec{y} = {}^t(A X) Y = {}^t X {}^t A Y = {}^t X ({}^t A Y) = \vec{x} \cdot (h(\vec{y}))$$

III.A.6) on a : $\vec{u} \neq \vec{0}$ $h(\vec{u}) = a\vec{u}$ et le plan ${}^\perp \vec{u} = \{\vec{x} \mid \vec{x} \cdot \vec{u} = 0\}$
 donc : $\forall \vec{x} \in {}^\perp \vec{u} : f(\vec{x}) \cdot \vec{u} = \vec{x} \cdot h(\vec{u}) = a \vec{x} \cdot \vec{u} = 0$
 soit $f(\vec{x}) \in {}^\perp \vec{u}$ et ${}^\perp \vec{u}$ est un sous espace stable.

III.B.1) Ici a est la seule valeur propre réelle, son sous espace propre associé étant (D) pour f et (D') pour h . La correspondance entre (D) et (D') est assurée par **III.A.4**.

III.B.2) \vec{k} est vecteur propre pour h et $\vec{j} \perp \vec{k}$, donc la question précédente prouve le résultat : $f(\vec{j}) \perp \vec{k}$.

III.B.3) Les colonnes de la matrice sont les composantes des images des vecteurs de la base. et \vec{i} est vecteur propre

$$\text{pour } a, \text{ et } f(\vec{j}) \perp \vec{k}. \text{ On a déjà : } B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & \alpha & d \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Puis le calcul du polynôme caractéristique n'ayant que a comme racine réelle donne : $\alpha = \beta = a$

III.B.4) Le sous espace relatif à a étant la droite (D) , la matrice $B - aI$ est de rang 2 et donc b et d ne peuvent pas être nuls.

III.B.5) On obtient :

$$BP = P^t B = \begin{pmatrix} bc & bd & ab \\ bd & ad & 0 \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } P \text{ inversible}$$

Donc B et ${}^t B$ sont des matrices semblables respectivement semblables à A et ${}^t A$ (comme représentantes du même endomorphisme (f respectivement h) dans deux bases de E)

D'après **I.C** A et ${}^t A$ sont des matrices semblables.

III.C. Le polynôme caractéristique de A est $(1 - \lambda)^3$ et n'a que $a = 1$ comme racine.

La droite (D) unique est la droite engendrée par \vec{i} .

La droite (D') également unique est engendrée par \vec{k} et est orthogonale à (D) .

Ici on a déjà : $A = B$.

III.D.1) Pour l'endomorphisme f deux droites distinctes au moins sont stables. Ce cas se produit pour un sous espace propre de dimension supérieure ou égale à 2 ou pour deux sous espaces propres relatifs à des valeurs propres distinctes. Alors le polynôme caractéristique est scindé dans \mathbb{R} avec au moins deux racines réelles distinctes et f est diagonalisable ou trigonalisable.

Si f est diagonalisable, un des sous espaces propre est une droite stable (D) et (P) est le plan sous espace propre pour l'autre valeur propre (double) ou est la somme directe des deux sous espaces propres relatifs aux autres valeurs propres.

Si f est trigonalisable, il existe une base où la matrice de f est : $\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, le plan engendré par les deux

premiers vecteurs de base est stable, de même que la droite engendrée par le troisième.

Reste le cas où (D) est unique mais où (D) et (D') ne sont pas orthogonaux. Le plan ${}^\perp(D')$ est stable par f et ne contient pas (d) .

Remarque : c'est le cas où le polynôme caractéristique possède 2 racines complexes conjuguées.

III.D.2) La droite et le plan sont supplémentaires d'où l'existence de la base (quelconque). dans laquelle f a pour matrice

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

III.D.3)

$${}^t B Q = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & ax + cz & ay + ct \\ 0 & bx + dz & by + dt \end{pmatrix} = Q B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & ax + cy & bx + dy \\ 0 & az + ct & bz + dt \end{pmatrix}$$

Le résultat est trivial si $b = c = 0$, la matrice diagonale étant égale à sa transposée.

Si $(b, c) \neq (0, 0)$ on retrouve le système de la partie **II**.

$$\begin{cases} ax + cz = ax + cy \\ bx + dz = az + ct \\ ay + ct = bx + dy \\ by + dt = bz + dt \end{cases} \iff \begin{cases} c(z - y) = 0 \\ bx + dy = az + ct \\ ay + ct = bx + dy \\ b(y - z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ bx + (d - a)y - ct = 0 \end{cases}$$

d'où l'existence de la matrice inversible Q telle que ${}^t B Q = Q B$

Donc B et ${}^t B$ sont des matrices semblables respectivement semblables à A et ${}^t A$ (comme représentantes du même endomorphisme (f respectivement h) dans deux bases de E)

D'après **I.C** A et ${}^t A$ sont des matrices semblables.

PARTIE IV

IV.A. tous les coefficients de M sont des complexes du type $z_{jk} = x_{jk} + iy_{jk}$, $(x_{jk}, y_{jk}) \in \mathbb{R}^2$

Alors : $M = P + iQ$ avec : $P = [x_{jk}]$ et $Q = [y_{jk}]$

IV.B.1) A et B sont semblables donc :

$$\exists Q \in M_n(\mathbb{C}) \text{ inversible} / AQ = QB$$

et d'après la question précédente on peut écrire :

$$Q = P_1 + iP_2 \text{ avec } (P_1, P_2) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$$

$$AP_1 + iP_2 = P_1B + iP_2B$$

l'unicité de la décomposition sur $M_n(\mathbb{R})$ donne les relations

$$AP_1 = P_1B + iP_2B \quad , \quad AP_2 = P_2B \quad \det(Q) = \det(P_1 + iP_2) \neq 0 \quad (Q \text{ inversible})$$

IV.B.2) Montrons par récurrence que g est polynomiale de degré inférieur ou égal à n .

Pour $n = 1$: $g(x) = p_1 + xp_2$ est un polynôme de degré ≤ 1 .

Supposons la propriété vraie pour $(n - 1)$. Le développement du déterminant par rapport à dernière ligne donne : ($P_{1,j}$ et $P_{2,j}$ étant les matrices obtenues en enlevant la dernière ligne et la j ème colonne de P_1 et P_2)

$$g(x) = \det(P_1 + xP_2) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} (p_{1,nj} + xp_{2,nj}) \det(P_{1,j} + xP_{2,j})$$

En appliquant l'hypothèse de récurrences aux $\det(P_{1,j} + xP_{2,j})$, $g(x)$ est une combinaison de fonction polynomiales, c'est donc une fonction polynomiale de degré $\leq n$. Le polynôme est à coefficients réels.

$g(i) \neq 0$ prouve que le polynôme n'est pas nul.

Pour une variable réelle g est un fonction polynomiale de \mathbb{R} dans \mathbb{R} associée à un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, g a au plus n racines,

donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \neq 0$ et la matrice $P_1 + xP_2$ est inversible.

IV.B.3) en conclusion : il existe $P_1 + xP_2 \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que : $A(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2)B$ et les matrices A et B sont semblables au sens de $M_n(\mathbb{R})$.

PARTIE V

V.A. Si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est scindé dans le corps de référence ce t endomorphisme est trigonalisable.

Cette propriété est toujours vérifiée dans \mathbb{C} .

V.B.1) La matrice de g dans la base \mathcal{B} est triangulaire supérieure, nulle sur la diagonale :

Les composantes de $g(e_i)$ dans cette base forment la i ème colonne de cette matrice, donc $g(e_i)$ est une combinaison linéaire de e_1, e_2, \dots, e_{i-1}

En outre : $g(e_1) = \vec{0}$

Par récurrence, on vérifie que pour $1 \leq k \leq n - 1$: $\text{Im}(g^k) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-k})$ et donc : $g^n = O$

Si $p = 1$ alors $g = O$ et sa matrice est la matrice nulle, et $f = \alpha Id$ est un endomorphisme diagonalisé.

Donc A et tA sont semblables comme en **I.D.1**).

On a : pour $0 \leq k \leq p - 1$: $g^k(\vec{u}^*) \neq \vec{0}$ et pour $k \geq p$: $g^k(\vec{u}^*) = \vec{0}$.

$$\text{Etudions la combinaison linéaire : } \vec{\sigma}^* = \sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{u}_i^* = \sum_{i=1}^p \alpha_i g^{p-i}(\vec{u}^*) = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{p-j} g^j(\vec{u}^*) = \vec{0}$$

En calculant successivement : $g^{p-1}(\vec{\sigma}^*) = \vec{0}$ puis $g^{p-2}(\vec{\sigma}^*) = \vec{0}$, ... , $g^{p-j}(\vec{\sigma}^*) = \vec{0}$ jusqu'à $g(\vec{\sigma}^*) = \vec{0}$, on obtient : $\alpha_p = a_{p-1} = \dots = a_1$.

Donc le système de vecteurs $\vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*, \dots, \vec{u}_p^*$ est libre

V.B.2) Pour $i > 1$ on a $f(\vec{u}_i^*) = \alpha \vec{u}_i^* + g(\vec{u}_i^*) = \alpha \vec{u}_i^* + \vec{u}_{i-1}^*$ et $f(\vec{u}_1^*) = \alpha \vec{u}_1^*$

Soit B la matrice de f dans la base $(\vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*, \dots, \vec{u}_n^*)$ et C celle de f dans la base $(\vec{u}_n^*, \vec{u}_{n-1}^*, \dots, \vec{u}_1^*)$. On a donc :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & & \dots & 0 \\ 1 & \alpha & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = {}^tB$$

Enfin A et B sont semblables, de même que tA et tB (**I.C**), donc A et tA sont semblables.

V.B.3) La matrice U s'écrit sous forme bloc : $U = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & M \\ \hline (0) & U_2 \end{array} \right)$ où $U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$

U_1 est carrée d'ordre p et U_2 est carrée d'ordre $n - p$ quelconque.

Bien sur : $U^p = O$ puisque $g_p = O$.

En Notant avec un indice 1 la première composante d'un vecteur, on peut évaluer la i ème colonne de P par : $g^0(\vec{u}_i)_1 = Id(\vec{u}_i)_1 = (\vec{u}_i)_1$, $g^1(\vec{u}_i)_1 = g(\vec{u}_i)_1$, $g^2(\vec{u}_i)_1$, ..., $g^{p-1}(\vec{u}_i)_1$, $g^p(\vec{u}_i)_1$, ..., $g^{n-1}(\vec{u}_i)_1$ soit : $g^0(\vec{u}_i)_1 = Id(\vec{u}_i)_1 = (\vec{u}_i)_1$, $g^1(\vec{u}_i)_1 = g(\vec{u}_i)_1$, $g^2(\vec{u}_i)_1$, ..., $g^{p-1}(\vec{u}_i)_1$, 0 , ..., 0

Donc les lignes de P sont nulles à partir de la $p + 1$ ème.

De plus les p premiers vecteurs de la base vérifient la définition de **V.B.1)** donc pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq k \leq p$,

$$g^{k-1}(\vec{u}_i) = g^{k-1}(g^{p-i}(\vec{u})) = g^{k-1+p-i}(\vec{u}) = \begin{cases} \vec{u}_{i-k+1} & \text{si } i - k > 0 \\ \vec{u}_1 & \text{si } i = k \\ \vec{0} & \text{si } i < k \end{cases}$$

Donc : $g^{k-1}(\vec{u}_i)_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et la matrice $P = \left(\begin{array}{c|c} I_p & Q \\ \hline (0) & (0) \end{array} \right)$ de rang p .

Précisons : $Q = [p_{ki}]_{\substack{1 \leq k \leq p \\ p+1 \leq i \leq n}} = [g^{k-1}(u_i)_1]_{\substack{1 \leq k \leq p \\ p+1 \leq i \leq n}}$

Avec cette matrice P et le bloc I_p , on a $\forall \vec{v} \text{ in } W \quad h(\vec{v}) = \vec{v}$.

$h(W) \subset \text{Im } h$ et de même dimension donc : $h(W) = \text{Im } h$ et sous espace propre relatif à la valeur propre 1

Le noyau étant sous espace propre relatif à la valeur propre 0, il est en somme directe avec W et d'après le théorème du rang, W et $\text{Ker } h$ sont supplémentaires de \mathbb{C}^n .

W est stable par g et par $f = g + \alpha Id$

Etudions la stabilité de $\text{Ker } h$ par g .

Un vecteur $\vec{x} \in \text{Ker } h$ de matrice $X = [x_i]$ ($\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{u}_i$) est solution du système $PX = 0$:

$$\left\{ \forall k = 0 \dots p : x_k + \sum_{i=p+1}^n g^k(\vec{u}_i)_1 \cdot x_i = 0 \right\}$$

Calculons : PUX pour vérifier que : $g(\vec{x}) \in \text{Ker } h$

$$PU = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & M + QU_2 \\ \hline (0) & (0) \end{array} \right) .$$

Précisons : $M + QU_2 = \left[\sum_{j=1}^n g^{k-1}(u_j)_1 \cdot g(u_i)_j \right]_{\substack{1 \leq k \leq p \\ p+1 \leq i \leq n}} = [g^k(u_i)_1]_{\substack{1 \leq k \leq p \\ p+1 \leq i \leq n}}$

car on reconnaît le calcul de la première ligne du produit de matrices $U^{k-1}U$ donc la première ligne de U^k .

On passe de P à PU en supprimant la première ligne de P et en complétant par une dernière ligne de 0

Donc PUX est la matrice obtenue en enlevant la première ligne de PX et en complétant par 0 en dernière ligne.

$\vec{x} \in \text{Ker } h \implies PX = 0 \implies PUX = 0 \implies g(\vec{x}) \in \text{Ker } h$

$\text{Ker } h$ est un sous espace stable par g et donc par f .

V.C.1) La matrice de f dans la base \mathcal{B} est triangulaire supérieure. Celle de g dans cette base est aussi triangulaire supérieure.

On peut la présenter sous la forme $\left(\begin{array}{c|c} T_1 & B \\ \hline (0) & T_2 \end{array} \right)$ qui est aussi triangulaire supérieure.

En outre T_2 a une diagonale nulle et donc : $T_2^{n-k} = 0$. (analogue à **V.B.1)**)

Tous les termes de la diagonale de T_1 sont associés à des valeurs propres de f distinctes de α et sont donc non nuls.

T_1 est inversible.

V.C.2) $\left(\begin{array}{c|c} T_1^{n-k} & B' \\ \hline (0) & T_2^{n-k} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} T_1^{n-k} & B' \\ \hline (0) & (0) \end{array} \right)$ est donc de rang k comme T_1 .

La dimension de $G = \text{Ker } g^{n-k}$ est $n = k$. Il est stable par g et par f .

V.C.3) on remarque : $F = \text{Im } g^{n-k}$ donc stable par g puis f .

Soit $\vec{x} \in F \cap G$, Si $\vec{x} \neq \vec{0}$ $g^{n-k}(\vec{x})$ a pour matrice $T_1^{n-k}X$ et est non nul ($\notin \Gamma$)
 F et G sont supplémentaires et stables par g et f .

V.D.1) En choisissant une base associée à la somme directe, la matrice de f est :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_F & (0) \\ \hline (0) & B_G \end{array} \right) \text{ semblable à } A.$$

$${}^tB = \left(\begin{array}{c|c} {}^tB_F & (0) \\ \hline (0) & {}^tB_G \end{array} \right) \text{ semblable à } {}^tA.$$

Par hypothèse de récurrence : B_F et tB_F sont semblables de même que B_G et tB_G .

$\exists Q_F$ et Q_G inversibles telles que $Q_F B_F = {}^tB_F Q_F$ et $Q_G B_G = {}^tB_G Q_G$

En posant $Q = \left(\begin{array}{c|c} Q_F & (0) \\ \hline (0) & Q_G \end{array} \right)$ on a Q inversible et $QB = {}^tBQ$ ce qui prouve que B et tB sont semblables

V.E. On utilise la partie **IV.**.

La matrice A est considérée comme une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. A ce titre, elle est semblable à sa transposée (question précédente), puis on a le résultat dans $M_n(\mathbb{R})$ par **IV.B.3**.

