

1 Première partie : étude de l'application \mathcal{A}_a

1.1 Propriétés élémentaires de \mathcal{A}_a

1.1.1. La linéarité de \mathcal{A}_a résulte directement de celle de la dérivation.

On vérifie également que si $\deg(P) \leq 3$, $\deg(\mathcal{A}_a(P)) \leq 3$, ce qui justifie que l'on a bien $\mathcal{A}_a(\mathbb{R}_3[X]) \subset \mathbb{R}_3[X]$.

1.1.2. Calculons : $\mathcal{A}_a(1) = 0$, $\mathcal{A}_a(X) = aX - 1$, $\mathcal{A}_a(X^2) = 2(a^2 + 1)X^2$, $\mathcal{A}_a(X^3) = (6 + 3a)X^3 + 3X^2$. Par suite :

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(a+1) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6+3a \end{pmatrix}.$$

1.1.3. (a) M_a est triangulaire supérieure, donc son polynôme caractéristique est $X(X+4)(X+6)^2$.

Par conséquent, M_{-4} est diagonalisable si et seulement si l'espace propre E_{-6} associé à la valeur propre -6 est de dimension 2 (soit sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique).

En résolvant l'équation $M_{-4}X = -6X$, on obtient que $E_{-6} = \text{Vect}((0, 0, 1, 0))$.

Donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_{-6}) = 1 < 2$: M_{-4} n'est pas diagonalisable.

(b) Les valeurs propres de M_{-4} sont 0, -4 , -6 , d'espaces propres respectifs

$E_0 = \text{Vect}((1, 0, 0, 0))$, $E_{-4} = \text{Vect}((1, 4, 0, 0))$ et $E_{-6} = \text{Vect}((0, 0, 1, 0))$.

1.1.4. (a) M_a est triangulaire supérieure : son polynôme caractéristique est $X(X-a)(X-2(a+1))(X-(3a+6))$.

Les valeurs propres de \mathcal{A}_a sont donc 0, a , $2(a+1)$ et $3a+6$.

(b) Les possibilités pour avoir une valeur propre double sont

- $\mathbf{a=0}$: alors les valeurs propres sont 0 (double), 2 et 6 ;
- $\mathbf{2(a+1)=0}$: alors $a = -1$ et les valeurs propres sont 0 (double), -1 et 3 ;
- $\mathbf{3a+6=0}$: alors $a = -2$ et les valeurs propres sont 0 (double) et -2 (double) ;
- $\mathbf{a=2(a+1)}$: alors $a = -2$ et les valeurs propres sont 0 (double) et -2 (double) ;
- $\mathbf{a=3a+6}$: alors $a = -3$ et les valeurs propres sont 0, -3 (double) et -4 ;
- $\mathbf{2(a+1)=3a+6}$: alors $a = -4$ et les valeurs propres sont 0, -4 et -6 (double).

(c) L'étude des valeurs propres doubles montre qu'il n'existe pas de valeur de a pour laquelle \mathcal{A}_a admet une valeur propre triple (pour avoir une valeur propre triple, il faut évidemment avoir déjà une double...).

1.1.5. Si $a \notin \{0, -1, -2, -3, -4\}$, alors le polynôme caractéristique de \mathcal{A}_a est scindé simple, donc \mathcal{A}_a est diagonalisable.

Il nous faut ensuite étudier en détail les valeurs de a restantes. Et plus particulièrement la dimension de l'espace propre correspondant à la valeur propre double (comme nous l'avons fait en 1.1.3a) :

- $\mathbf{a = 0}$: $E_0 = \text{Vect}((1, 0, 0, 0))$ donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_0) = 1 < 2$; \mathcal{A}_0 n'est pas diagonalisable ;
- $\mathbf{a = -1}$: $E_0 = \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$ donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_0) = 2$; \mathcal{A}_{-1} est diagonalisable ;
- $\mathbf{a = -2}$: $E_0 = \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 3, 2))$ et $E_{-2} = \text{Vect}((1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$ donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_0) = \dim_{\mathbb{R}}(E_{-2}) = 2$; \mathcal{A}_{-2} est diagonalisable ;
- $\mathbf{a = -3}$: $E_{-3} = \text{Vect}((1, 3, 0, 0), (0, 0, 3, 1))$ donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_{-3}) = 2$; \mathcal{A}_{-3} est diagonalisable ;
- $\mathbf{a=-4}$: déjà traité ; \mathcal{A}_{-4} n'est pas diagonalisable.

Finalement, \mathcal{A}_a est diagonalisable pour tout $a \in \mathbb{R}$, sauf $a = 0$ et $a = -4$.

1.1.6. Si P est un polynôme de degré p , de coefficient dominant α , alors $\mathcal{A}_a(P)$ est de degré $\leq p$, le coefficient de degré p de $\mathcal{A}_a(P)$ étant $\alpha(p(p-1) + ap)$. Et ce coefficient est non nul pour tout polynôme P de degré p si et seulement si $a \neq -(p-1)$. Ceci doit être vérifié pour $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$.

Donc $\mathcal{A}_a(P)$ est de même degré que P pour tout polynôme non constant de $\mathbb{R}_3[X]$ si et seulement si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}$. Remarque : on pouvait également remarquer que ceci n'est vérifié que si 0 n'apparaît pas deux fois sur la diagonale de M_a , donc n'est pas une valeur propre double de \mathcal{A}_a .

1.2 Étude de cas particuliers

On suppose que $a \notin \{0, -1, -2\}$.

1.2.1. $\ker(\mathcal{A}_a) = \text{Vect}(1)$.

1.2.2. D'après le théorème du rang et 1.2.1, $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Im}(\mathcal{A}_a)) = 4 - 1 = 3$. De plus, $\mathcal{A}_a(X) = -1 + aX \in \text{Im}(\mathcal{A}_a)$, $\mathcal{A}_a\left(\frac{1}{2(a+1)}X^2\right) = X^2 \in \text{Im}(\mathcal{A}_a)$ et $\mathcal{A}_a\left(\frac{1}{(6+3a)}X^3 - \frac{3}{2(6+3a)(a+1)}X^2\right) = X^3 \in \text{Im}(\mathcal{A}_a)$.

Enfin, $(-1 + aX, X^2, X^3)$ est libre (famille de polynômes de degrés 2 à 2 distincts). Ceci montre que $(-1 + aX, X^2, X^3)$ est une base de $\text{Im}(\mathcal{A}_a)$.

1.2.3. Rappelons que l'ensemble \mathcal{S} des solutions de l'équation linéaire $\mathcal{A}_a(P) = Q$ est

- $\mathcal{S} = R + \ker(\mathcal{A}_a)$ si R (souvent appelé «solution particulière») vérifie $\mathcal{A}_a(R) = Q$, i.e. si $Q \in \text{Im}(\mathcal{A}_a)$;
- $\mathcal{S} = \emptyset$ si $Q \notin \text{Im}(\mathcal{A}_a)$.

Et cela s'applique directement ici :

- si $p = 0$ ou $p = 1$, $\mathcal{S} = \emptyset$;
- si $p = 2$, $\mathcal{S} = \frac{1}{2(a+1)}X^2 + \text{Vect}(1) = \left\{ \frac{1}{2(a+1)}X^2 + \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$;
- si $p = 3$, $\mathcal{S} = \frac{1}{(6+3a)}X^3 - \frac{3}{2(6+3a)(a+1)}X^2 + \text{Vect}(1) = \left\{ \frac{1}{(6+3a)}X^3 - \frac{3}{2(6+3a)(a+1)}X^2 + \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

2 Deuxième partie : quelques propriétés de l'application $\mathcal{A}_{(a,n)}$

2.1. Comme en 1.1.1, cela découle directement de la linéarité de la dérivation, en prenant soin de vérifier que si $\deg(P) \leq n$, $\deg(\mathcal{A}_{(a,n)}(P)) \leq n$.

2.2. Calculons : $\mathcal{A}_{(a,n)}(1) = 0$, $\mathcal{A}_{(a,n)}(X) = aX - 1$ et $\forall k \geq 2$, $\mathcal{A}_{(a,n)}(X^k) = k(k+a-1)X^k + k(k-2)X^{k-1}$, d'où

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 2(a+1) & 3 & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 3(2+a) & \ddots & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & j(j-2) & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & j(j-1+a) & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & & (n-1)(n-3) & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & (n-1)(n-2+a) & n(n-2) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n-1+a) \end{pmatrix}.$$

2.3. La matrice M_a étant triangulaire supérieure, il vient immédiatement que les valeurs propres de $\mathcal{A}_a n$ sont les

$$\lambda = k(k-1+a), \quad \text{pour } k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

(Remarquer que $0(0-1+a) = 0$ et $1(1-1+a) = a$.)

2.4. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Il y a équivalence entre les énoncés, $\forall k, \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

- $k(k-1+a) = \ell(\ell-1+a)$;
- $(k-\ell)(k+\ell-1+a) = 0$;
- $k = \ell$ (en effet, $k+\ell-1 \geq 0$ et $a > 0$).

Par suite, $\mathcal{A}_{(a,n)}$ possède $n+1$ valeurs propres distinctes et donc est diagonalisable.

Dans le cas particulier $a = 0$, 0 est racine d'ordre 2 du polynôme caractéristique et $E_0 = \ker(\mathcal{A}_{(0,n)}) = \text{Vect}(1)$ est de dimension 1 : $\mathcal{A}_{(0,n)}$ n'est pas diagonalisable.

3 Troisième partie : recherche de solutions développables en série entière d'une équation différentielle

3.1. Soit $f \in \mathcal{E}$.

Alors $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum a_n x^n$ converge. Donc le rayon de convergence R de cette série entière vérifie $R \geq 1$.
Une série entière étant de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$, il en résulte que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$.

3.2. Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $\mathcal{D}_a(f) = af$.

(a) Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\text{et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$$

Et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a(f)(x) - af(x) &= x(x+1) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (ax-1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - a \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a a_n x^n \\ &= (-a_1 - a a_0) + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)[(n+1) a_{n+1} + (n+a) a_n] x^n. \end{aligned}$$

D'où, par unicité de développement en série entière, comme $\mathcal{D}_a(f)(x) - af(x) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 x^n$, nous obtenons

$$\forall n \geq 2, (n-1)[(n+1) a_{n+1} + (n+a) a_n] = 0.$$

Et aussi $0 = (-a_1 - a a_0) = (0-1)[(0+1) a_{0+1} + (0+a) a_0]$ (égalité pour $n=0$) et $0 = (1-1)[(1+1) a_{1+1} + (1+a) a_1]$ (égalité pour $n=1$).

(b) La question précédente montre que $a_{n+1} = -\frac{n+a}{n+1} a_n$. Une récurrence immédiate permet de démontrer que pour tout entier $n \geq 3$,

$$a_n = \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1} (k+a)}{n!} a_2.$$

Supposons maintenant $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 = 1$.

$f(x) = \sum a_n x^n$ est un polynôme si et seulement si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow a_n = 0$.

D'après la relation de récurrence $a_{n+1} = -\frac{n+a}{n+1} a_n$, si $a_{n_0} = 0$, alors $\forall n \geq n_0$, $a_n = 0$. Donc f est un polynôme si, et seulement si, l'un de a_n s'annule, et donc si, et seulement, si $\exists k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ tel que $k+a = 0$. On en déduit que

f est un polynôme si, et seulement si, $a \in \mathbb{Z}$, $a \leq -2$.

Si $a = -n \leq -2 \in \mathbb{Z}$, alors

- le degré de f est n ;

- son coefficient dominant est $a_n = \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1} (k-n)}{n!} \times 1 = \frac{2 \prod_{k=2}^{n-1} (n-k)}{n!} = \frac{2(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n(n-1)} = \frac{1}{\binom{n}{2}}$.

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \left| -\frac{n+a}{n+1} \right| |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$$

donc d'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$, ce qui montre le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

3.3. Ceci montre que l'ensemble des solutions dans \mathcal{E} de $\mathcal{D}_a(f) = af$ est

$$\begin{aligned} & \left\{ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \mid a_1 = -aa_0 \text{ et } \forall n \geq 3, a_n = \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1} (k+a)}{n!} a_2 \right\} \\ &= \left\{ x \mapsto \alpha - a\alpha x + \beta x^2 + \beta \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1} (k+a)}{n!} x^n \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(x \mapsto 1 - ax, x \mapsto x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1} (k+a)}{n!} x^n \right). \end{aligned}$$

3.4. Par suite, pour tout réel a , $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(\mathcal{D}_a - a \cdot \text{Id}_{\mathcal{E}})) = 2$.

Et $P \in \ker(\mathcal{A}_{(a,n)} - a \cdot \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ si, et seulement si, $P \in \ker(\mathcal{D}_a - a \cdot \text{Id}_{\mathcal{E}})$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

On a donc :

$$\text{si } a \notin \llbracket -n, -1 \rrbracket, \quad \ker(\mathcal{A}_{(a,n)} - a \cdot \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \text{Vect}(x \mapsto 1 - ax)$$

et

$$\text{si } a \in \llbracket -n, -1 \rrbracket, \quad \ker(\mathcal{A}_{(a,n)} - a \cdot \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \text{Vect} \left(x \mapsto 1 - ax, x \mapsto x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1} (k+a)}{n!} x^n \right)$$

(dans ce cas, le deuxième vecteur est un polynôme).

Donc

- si $a \notin \llbracket -n, -1 \rrbracket$, $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(\mathcal{A}_{(a,n)} - a \cdot \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 1 \neq \dim_{\mathbb{R}}(\ker(\mathcal{D}_a - a \cdot \text{Id}_{\mathcal{E}}))$;
- si $a \in \llbracket -n, -1 \rrbracket$, $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(\mathcal{A}_{(a,n)} - a \cdot \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(\mathcal{D}_a - a \cdot \text{Id}_{\mathcal{E}}))$.

4 Quatrième partie : résolution d'une équation différentielle

4.1. Soit f une solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Alors f est deux fois dérivable et pour tout $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{1-ax}{x(x+1)} f'(x) + 2 \frac{a+1}{x(x+1)} f(x).$$

Par suite, comme $x \mapsto x(x+1)$ ne s'annule pas, f'' est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et donc f est de classe \mathcal{C}^3 sur $]0, +\infty[$ et f' de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.

Il en résulte que f'' est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ donc que f est de classe \mathcal{C}^4 sur $]0, +\infty[$ et f' de classe \mathcal{C}^3 sur $]0, +\infty[$.

De proche en proche, on établit ainsi que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$.

4.2. Soit φ une solution de (E) sur $]0, +\infty[$. φ est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$, d'où, comme $x \mapsto 1/x^2$ est également de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$, on en déduit que

$$\psi : x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x^2} \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Calculons, pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = 2x\psi(x) + x^2\psi'(x) \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = 2\psi(x) + 4x\psi'(x) + x^2\psi''(x)$$

et donc

$$\begin{aligned} 0 &= x(x+1)\varphi''(x) + (ax-1)\varphi'(x) - 2(a+1)\varphi(x) \\ &= x^2 [x(x+1)\psi''(x) + ((4+a)x+3)\psi'(x)] + (2x^2 + 2ax^2 - 2ax^2 - 2x^2 + 2x - 2x)\psi(x) \\ &= x^2 [x(x+1)\psi''(x) + ((4+a)x+3)\psi'(x)] \end{aligned}$$

donc ψ' est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(E_1) \quad x(x+1)u' + ((4+a)x+3)u = 0.$$

Ceci était prévisible puisque X^2 est un vecteur propre de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ associé à la valeur propre $2(a+1)$ et donc $x \mapsto x^2$ est solution de (E) , donc avec le changement de fonction, les termes en $\psi(x)$ se simplifient.

4.3. On sait que l'ensemble des solutions d'une telle équation est

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ x \mapsto \alpha e^{-\int_1^x \frac{(4+a)t+3}{t(t+1)} dt} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cherchons à écrire $\frac{(4+a)t+3}{t(t+1)}$ sous la forme $\frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t+1}$. En réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{(4+a)t+3}{t(t+1)} = \frac{3}{t} + \frac{1+a}{t+1} \text{ donc } \int_1^x \frac{(4+a)t+3}{t(t+1)} dt = 3\ln(t) + (1+a)\ln(1+t) - (1+a)\ln(2) \text{ d'où}$$

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ x \mapsto \frac{\alpha}{t^3(t+1)^{1+a}} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.4. On suppose $a = -4$.

(a) On a l'équivalence entre les énoncés :

- (i) φ solution de (E) sur $]0, +\infty[$;
- (ii) ψ' solution de (E_1) sur $]0, +\infty[$, où $\psi : x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x^2}$;
- (iii) $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0$, $\psi'(x) = \alpha \frac{(x+1)^3}{x^3} = \alpha \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$;
- (iv) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x > 0$, $\psi(x) = \alpha \left(x + 3\ln(x) - \frac{3}{x} - \frac{1}{2x^2} \right) + \beta$;
- (v) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \alpha \left(x^3 + 3x^2 \ln(x) - 3x - \frac{1}{2} \right) + \beta x^2$.

D'où les solutions de (E) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \ker(\Delta_{-4} + 6 \text{Id}_{\mathcal{C}^\infty}) \\ &= \left\{ x \mapsto \alpha \left(x^3 + 3x^2 \ln(x) - 3x - \frac{1}{2} \right) + \beta x^2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(x \mapsto \left(x^3 + 3x^2 \ln(x) - 3x - \frac{1}{2} \right), x \mapsto x^2 \right). \end{aligned}$$

(b) On obtient que $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(\Delta_{-4} + 6 \text{Id}_{\mathcal{C}^\infty})) = 2$, alors que $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(\mathcal{A}_{-4} + 6 \text{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})) = 1$. (Cela provient du fait que $x \mapsto \left(x^3 + 3x^2 \ln(x) - 3x - \frac{1}{2} \right)$ n'est pas un polynôme.)