

première composition de mathématiques

Partie I

- 1) •a)  $u$  est trivialement linéaire et puisque  $\ker(u) \cap E' = \{0\}$ ,  $u$  est injective.

$\forall y \in \text{Im}(u), \exists (a, b) \in E' \times \ker(u), y = u(a + b)$ . Donc  $y = u(a)$  et  $u$  est bien un isomorphisme de  $E'$  sur  $\text{Im}(u)$ .

On peut remarquer, en fait, que l'on établit la propriété fort classique suivante :

$$\forall y \in \text{Im}(u), \exists ! x \in E', y = u(x)$$

- b)  $\forall y \in F, \exists ! (a', y') \in \text{Im}(u) \times F', y = a' + y'$ . Or,  $\forall a' \in \text{Im}(u), \exists ! x' \in E', a' = u(x')$  cqfd

- 2) •a) L'unicité établie à la question précédente permet de justifier la linéarité de  $v$ .

En effet, prenons deux éléments quelconques de  $F$ ,  $y_1$  et  $y_2$  et décomposons les comme dans la question précédente :  $y_1 = u(x'_1) + y'_1$ ,  $y_2 = u(x'_2) + y'_2$ . On obtient, pour tout scalaire  $\lambda$ ,  $y_1 + \lambda y_2 = u(x_1 + \lambda x_2) + y'_1 + \lambda y'_2$ , d'où  $v(y_1 + \lambda y_2) = x_1 + \lambda x_2$

- b) Si  $u$  est un isomorphisme alors  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{-1}$

- 3) On a immédiatement  $v(y) = 0 \Leftrightarrow y \in F'$   $\mathbf{Ker\ v} = \mathbf{F}'$  et  $\text{Im}(v) \subset E'$ .

De plus,  $\text{Im}(v) \subset E'$  et  $\forall x \in E', v(u(x)) = x$ . Donc  $\mathbf{Im(v)} = \mathbf{E'}$ .

Soit  $x \in E, \exists (a, b) \in E' \times \ker(u), x = a + b$ .

$u(x) = u(a) \Rightarrow v(u(x)) = a$  donc  $uvu = u$

Soit  $y \in F, \exists (a, b) \in E' \times F', x = u(a) + b$ .

$v(y) = a \Rightarrow u(v(y)) = u(a)$  donc  $vuv = v$

- 4) En composant par  $u$  ou par  $v$  les égalités précédentes, on trouve immédiatement que  $uv$  et  $vu$  sont des projecteurs. On a aussi que  $F' \subset \ker(uv)$  et que, puisque  $\text{Im}(u) = u(E')$ ,  $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(uv) \subset \text{Im}(u)$ .

Enfin,  $x \in \ker(uv) \Rightarrow v(x) \in \ker(u) \cap E'$ . Ceci entraîne que  $v(x) = 0$  et  $x \in F'$

Finalement  $\mathbf{\ker(uv)} = \mathbf{F'}$  et  $\mathbf{Im(uv)} = \mathbf{Im(u)}$

De même on montre aisément que  $\mathbf{\ker(vu)} = \mathbf{\ker(u)}$  et  $\mathbf{Im(vu)} = \mathbf{E'}$ .

- 5)  $y = u(x) \Rightarrow uv(y) = y$ . Donc  $\text{Im}(u) \cap \ker(v) = \{0\}$  et, de même  $\text{Im}(v) \cap \ker(u) = \{0\}$

Ensuite,  $\forall x \in E, u(vu(x) - x) = 0$  donc  $x = vu(x) + (x - vu(x)) \in \text{Im}(v) + \ker(u)$ .

Le même argumentaire nous donne aussi  $F = \text{Im}(u) + \ker(v)$  ce qui finit de démontrer le résultat attendu

- 6) Posons  $a = te_1 + e_2$  et  $b = e_1 + te_2$

$e_1 = -te_2 + b = u(-ta) + b$ ,  $e_2 = u(a) + 0$  La matrice de  $v$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est donc  $\boxed{\begin{pmatrix} -t^2 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}}$

**PARTIE II**

corrigée à la main au début de la partie II :

• 1) •a) Il suffit d'appliquer la Partie I pour  $\boxed{\mathbf{E}' = \ker(\mathbf{u})^\perp}$  et  $\boxed{\mathbf{F}' = \text{Im}(\mathbf{u})^\perp}$

•b)  $u$  vérifie les conditions demandées d'où  $\boxed{(\mathbf{u}^-)^- = \mathbf{u}}$

•c) On sait déjà d'après (I.4) que  $uu^-$  et  $u^-u$  sont des projecteurs. Les noyaux et images déterminés au I 4) sont orthogonaux entre eux, ce sont donc des projecteurs orthogonaux. Ils sont donc autoadjoints.

• 2) •a) En reprenant et adaptant les arguments du I 5), on trouve que  $uvu = u \Rightarrow \text{Im}(v) \subset \text{Im}(vu) \subset \text{Im}(v)$   $\ker(vu) \subset \ker(u)$  et  $\ker(u) \subset \ker(vu)$   
Ce qui nous donne les résultats demandés.

•b) On déduit de ce qui précède que  $\text{Im}(v)^\perp = \ker(u)$  (car  $vu$  est un projecteur autoadjoint) et en intervertissant les rôles de  $u$  et de  $v$ ,  $\text{Im}(u)^\perp = \ker(v)$ .  $v$  correspond alors à l'application définie à la partie I, ce qui donne bien  $v = u^-$

• 3) Il s'agit de la lecture matricielle de la question précédente : en posant  $v$  l'application linéaire de matrice  $A^-$  dans les bases canoniques, les différentes égalités se traduisent par :  $uvu = v$ ,  $vvv = u$ ,  $vu$  et  $uv$  sont des projecteurs orthogonaux. La question 2 permet de déduire que ces égalités caractérisent bien  $u^-$  et par la même  $A^-$

• 4) En transposant toutes les égalités précédentes, on trouve que  $\boxed{({}^t\mathbf{A})^- = {}^t(\mathbf{A}^-)}$

• 5) Les relations du II 1)a) entraînent que  $A^-$  est de la forme  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AA^-A = A \Rightarrow A'BA' = A'$ . Donc  $B = (A')^{-1} \boxed{\mathbf{A}^- = \begin{pmatrix} (A')^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

**PARTIE III**

• 1) •a)  $\boxed{\text{Im}(\mathbf{A}) = \text{Vect}((\mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{0}), (\mathbf{3}, -\mathbf{4}, \mathbf{10}))}$ ,  $Y = 1/2(3, -4, 10) - 7/3(4, 3, 0) + 125/2(1, 0, 0)$   
Ainsi  $Y \notin \text{Im}(A)$  et le système n'a pas de solutions.

- b)  $\ker(\mathbf{A})$  est dirigé par le vecteur de coordonnées  $(1, -1, 0)$  dans la base canonique.

La base de  $\text{Im}(A)$  déterminée ci dessus est orthogonale, ce qui permet d'obtenir le projeté orthogonal  $Z$  de  $Y$  sur  $\text{Im}(A)$  :  $\mathbf{Z} = (7, -1, 10)$

(Rappel : Si le plan est dirigé par la famille orthogonale  $(e_1, e_2)$ , on a  $p(y) = \frac{(e_1/y)}{(e_1/e_1)}e_1 + \frac{(e_2/y)}{(e_2/e_2)}e_2$ )

Les résultats de la partie I et II nous donnent que la pseudo solution du système est le vecteur  $X$  de  $\ker(u)^\perp$  tel que  $AX = Z$

Ses coordonnées sont solutions du système 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ \frac{4\sqrt{2}}{5}(x_1 + x_2) + \frac{3}{5}x_3 = 7 \\ \frac{3\sqrt{2}}{5}(x_1 + x_2) - \frac{4}{5}x_3 = -1 \\ 2x_3 = 10 \end{cases} \text{ Soit } \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}}, \mathbf{x}_3 = 5$$

- 2) Tout est dit dans le I 1)a) dans le cas particulier où  $y'=0$ . Parmi toutes les solutions de  $AX = Y$ , une seule est dans  $E' = \ker(u)^\perp$ , c'est la pseudo-solution par définition.

- 3) •a) Pour déterminer la pseudo solution de  $AX = Y$ , on décompose  $Y$  selon  $\text{Im}(A)$  et  $\text{Im}(A)^\perp$  sous la forme  $Y = Y_1 + Y_2$  et on cherche la seule solution  $X_1$  dans  $\ker(A)^\perp$  de  $AX_1 = Y_1$ . Or  $Y_1 = JY$  où  $J$  est la matrice de la projection orthogonale sur  $\text{Im}(A)$ .

- b)  $X$  pseudo solution du système si et seulement si  $X \in \ker(A)^\perp$  et  $AX = Y'$   
 $X$  pseudo solution du système si et seulement si  $X \in \text{Im}({}^tA)$  et  $AX = Y'$   
 $X$  pseudo solution du système si et seulement si  $\exists Z, X = {}^tAZ$  et  $A{}^tAZ = Y'$

- 4) La matrice  $A{}^tA$  étant une matrice carrée de taille  $p$ , on prend une base adaptée de l'espace formée  $\mathbf{d'une base de \ker({}^tA)^\perp = \text{Im}(A)}$  et  $\mathbf{d'une base de \ker({}^tA)}$ .

On a  $\ker({}^tA) \subset \ker(A{}^tA)$ .  
 Réciproquement,  $U \in \ker(A{}^tA) \Rightarrow A{}^tAU = 0$   
 $U \in \ker(A{}^tA) \Rightarrow {}^tUA{}^tAU = 0$   
 $U \in \ker(A{}^tA) \Rightarrow {}^t({}^tAU){}^tAU = 0$   
 $U \in \ker(A{}^tA) \Rightarrow U \in \ker({}^tA)$

Donc  $\ker({}^tA) = \ker(A{}^tA)$  et  $\text{Im}(A) = \text{Im}(A{}^tA)$  En particulier  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A{}^tA)$

La nouvelle matrice sera ainsi bien de la forme souhaitée, et, si  $P$  est la matrice de changement de base, on aura :  $Z = PZ', Y = PY'$  avec  $Y'$  de la forme souhaitée.

- 5) On trouve alors  $\mathbf{X = {}^tAP \begin{pmatrix} B'^{-1}Y'_1 \\ Z'_2 \end{pmatrix}}$

- 6) Le vecteur  ${}^t(0, Z'_2)$  est un vecteur colonne de  $\ker({}^tA)$  exprimé dans la base adaptée. Donc  $P{}^t(0, Z'_2)$  est un vecteur de  $\ker({}^tA)$  exprimé dans la base canonique. Donc  ${}^tAP(0, Z'_2) = 0$  et

$$X = {}^tAP \begin{pmatrix} B'^{-1}Y'_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 7)

$$X = {}^tAP \begin{pmatrix} B'^{-1}Y'_1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^-Y = A^-PY'$$

et on a aussi (Partie II 5),  $B^- = B'^{-1}$ . Donc  $A^- = {}^tAPB^-P^{-1}$

- 8) Le calcul nous donne immédiatement  $A^- = {}^tAP_1B'^{-1}Q_1$

**Partie IV**

- 1) C'est un résultat classique du programme de MP : La matrice  ${}^tAA$  est une matrice symétrique réelle positive, elle est donc diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale et ses valeurs propres sont positives ou nulles.

- 2) C'est à nouveau un résultat du cours de réduction : Si  $u$  est un endomorphisme diagonalisable,  $u = \sum_{\alpha \in \text{Spectre}(u)} \alpha p_\alpha$  avec  $p_\alpha$  le projecteur sur  $E_\alpha(u)$  parallèlement à la somme des autres sous espaces propres.

De plus, les sous espaces propres étant deux à deux orthogonaux, la projection sur un sous espace propre parallèlement à la somme des autres est en fait la projection orthogonale sur ce sous espace propre.

- a) On trouve donc, par la remarque précédente  $A = \sum_{\lambda \in S} \lambda P_\lambda$

- b)  $A^-A$  est la matrice d'un projecteur orthogonal de noyau  $\ker(A)$  d'image  $\ker(A)^\perp = \ker({}^tAA)^\perp$  qui est égal à la somme de tous les sous espaces propres associés à des valeurs propres non nulles de  ${}^tAA$ . Donc  $A^-A = \sum_{\lambda \in S} P_\lambda$

- c)  $\sum_S \sqrt{\lambda} A_\lambda = A(I_n - P_0) = A$  puisque,  $P_0$  étant le projecteur d'image  $\ker(A)$ , on a  $AP_0 = 0$

- 3)  ${}^t\mathbf{A}_\lambda \mathbf{A}_\lambda = \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}_\lambda {}^t\mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{P}_\lambda = \mathbf{P}_\lambda$  car  ${}^tA A P_\lambda = \lambda P_\lambda$

En remarquant que  $A_\lambda P_\lambda = A_\lambda$ , on trouve alors que  ${}^tA_\lambda A_\lambda {}^tA_\lambda = P_\lambda {}^tA_\lambda = ({}^t(A_\lambda P_\lambda)) = {}^tA_\lambda$

De même  $A_\lambda {}^tA_\lambda A_\lambda = A_\lambda P_\lambda = A_\lambda$

Finalement, en utilisant la caractérisation du Partie II 3), on a  $\mathbf{A}_\lambda^- = {}^t\mathbf{A}_\lambda$

- b) ceci est immédiat car  $P_\lambda P_\mu = 0$

- 4) Notons, à priori,  $M = \sum_S \frac{1}{\sqrt{\lambda}} {}^tA_\lambda$ .

On obtient alors que  $AM = \sum_S A_\lambda {}^tA_\lambda$ ,  $MA = \sum_S {}^tA_\lambda A_\lambda$  puis que  $AMA = A$  et que  $MAM = M$ .

La caractérisation du II 3) nous donne bien que  $M = A^-$

• 5)

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 50 & 50 & 0 \\ 50 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de  ${}^tAA$  sont 0, 4 et 5. Une base orthonormée de diagonalisation associée à ces valeurs propres est  $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ . Les projecteurs orthogonaux

associés aux deux valeurs propres non nulles sont :  $P_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^- = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{25} & \frac{3\sqrt{2}}{100} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{25} & \frac{3\sqrt{2}}{100} & 0 \\ \frac{3}{125} & \frac{-4}{125} & \frac{2}{25} \end{pmatrix}$$

Le très beau petit programme en Maple suivant permet de trouver ce résultat en moins de une seconde et demi (sur pentium 400) *Il est tiré du très bon livre hollandais : Heck (introduction to MAPLE -springer) édition 96 p 631-632 (=édition 93p 465) Procédure de construction de la pseudo inverse :*

*with(linalg) : MPinv := A- > map(limit, evalm(evalm((transpose(A)&\*A + t^2)^( - 1))&\*transpose(A)), t = 0);*

*On constate que cette procédure est bien plus courte que celles du stage INRIA (Dumas, Gourdon) de septembre 96 (cf Photocopies de Melle Reviron) et de celle de BERSTEL en Pascal page 23 et sqq ; Elle marche même avec des matrices polynomiales (voir Heck p 632) ;*

*M := matrix(3, 3, [[4 \* sqrt(2), 4 \* sqrt(2), 3], [3 \* sqrt(2), 3 \* sqrt(2), -4], [0, 0, 10]]);*

*st := time() : MPinv(M); chrono := (time() - st) \* seconde(s);*

donne en 1.443 seconde(s)  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{25} & \frac{3\sqrt{2}}{100} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{25} & \frac{3\sqrt{2}}{100} & 0 \\ \frac{3}{125} & \frac{-4}{125} & \frac{2}{25} \end{pmatrix}$