

Questions préliminaires

1. Changement de variable dans une intégrale sur un intervalle:

Soit f une fonction continue et intégrable sur I et soit φ une bijection de classe C^1 de J sur I . On peut écrire: $\int_I f = \int_J f \circ \varphi \cdot |\varphi'|$.

2. Dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz):

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$, et dérivable par rapport à x . On suppose que:

- pour tout $x \in I$, les fonctions $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur J ;
- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I ;
- il existe une fonction positive φ , continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout élément (x, t) de $I \times J$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$.

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur I , et $g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

3. Théorème de convergence dominée:

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur I et φ une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur I . Si (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et si, pour tout entier n , $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination), alors f est intégrable sur I et $\int_I f = \lim_n \int_I f_n$.

Première partie

1. $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin x$ a pour limite $\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers 1 donc I_1 existe et $I_1 = \frac{\pi}{2}$.
 $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left[-\sqrt{1-t^2} \right]_0^x = 1 - \sqrt{1-x^2}$ a pour limite 1 quand x tend vers 1 donc I_2 existe et $I_2 = 1$.

2. Puisque $\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ au voisinage de 1 et que I_1 existe on en déduit que I_3 existe.

$\varphi(u) = \sin u$ définit une bijection de classe C^1 de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$ donc on peut appliquer la question 1 du

préliminaire: $I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 u}{|\cos u|} \cos u du = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos(2u)) du = \left[\frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{2} \sin(2u) \right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

3. (a) Puisque $\frac{|\cos(xt)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et que I_1 existe on déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Nous allons appliquer deux fois le théorème de Leibniz avec $I = \mathbb{R}$ et $J = [0, 1]$.

Posons $g(x, t) = \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$. On calcule: $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \frac{-t^2 \cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$.

- pour tout $x \in I$, les fonctions $t \mapsto \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$, $t \mapsto \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$ et $t \mapsto \frac{-t^2 \cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$ sont continues par morceaux et intégrables sur $[0, 1]$ (puisque elles sont majorées en valeur absolues par les fonctions qui apparaissent dans I_1 , I_2 et I_3);

- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \frac{-t^2 \cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$;

- il existe deux fonctions positives φ_1 et φ_2 , continues par morceaux et intégrables sur J , telles que pour tout élément (x, t) de $I \times J$, $\left| \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \varphi_1(t)$ et $\left| \frac{-t^2 \cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \varphi_2(t)$ (φ_1 et φ_2 sont intégrables sur $[0, 1[$ car I_2 et I_3 existent).

On en déduit que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = \int_0^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ et $f''(x) = \int_0^1 \frac{-t^2 \cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

(c) Soit $a \in]0, 1[$. Intégrons par parties sur $[0, a]$:

$$\int_0^a \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left[\sqrt{1-t^2} \sin(xt) \right]_0^a - \int_0^a \sqrt{1-t^2} x \cos(xt) dt$$

$$\text{d'où } \int_0^a \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sqrt{1-a^2} \sin(xa) - x \int_0^a \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

En faisant tendre a vers 1 on obtient: $f'(x) = -x(f(x) + f''(x))$.

4. (a) $u'(x) = q'(x)z^2(x) + 2z'(x)(q(x)z(x) + z''(x)) = q'(x)z^2(x) \leq 0$ donc u est décroissante sur I .
 (b) $u(x) \leq u(1)$ entraîne que $q(x)z^2(x) \leq u(1)$; puisque $q(x) \geq q_0 > 0$ on déduit $z^2(x) \leq \frac{u(1)}{q_0}$ donc $|z(x)| \leq \sqrt{\frac{u(1)}{q_0}}$: z est bornée sur I .

5. En dérivant deux fois avec la formule de Leibniz on obtient:

$$z''(x) = (x^{1/2}y(x))^{(2)} = -\frac{1}{4}x^{-3/2}y(x) + x^{-1/2}y'(x) + x^{1/2}y''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}y(x) - x^{1/2}y(x).$$

On en déduit $z''(x) + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) \sqrt{x}y(x) = 0$ et donc $q(x) = 1 + \frac{1}{4x^2}$.

6. La fonction f du 3. est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et elle vérifie l'équation différentielle du 5. donc la fonction z associée est de classe C^2 sur I et vérifie $z''(x) + q(x)z(x) = 0$ avec $q(x) = 1 + \frac{1}{4x^2}$.

Comme $q'(x) = -\frac{1}{2x^3} \leq 0$ on peut appliquer le résultat du 4.(b) : la fonction z est bornée.

Par suite on a bien l'existence d'un $M > 0$ tel que $|f(x)\sqrt{x}| \leq M$ pour $x \in I$.

Deuxième partie

1. Dérivons deux fois $z(t) = y(\frac{1}{t})$: $z'(t) = -\frac{1}{t^2}y'(\frac{1}{t})$ puis $z''(t) = \frac{2}{t^3}y'(\frac{1}{t}) + \frac{1}{t^4}y''(\frac{1}{t})$.

On en déduit: $4tz''(t) + 8z'(t) - tz(t) = \frac{8}{t^2}y'(\frac{1}{t}) + \frac{4}{t^3}y''(\frac{1}{t}) - \frac{8}{t^2}y'(\frac{1}{t}) - ty(\frac{1}{t}) = 4x^3y''(x) - \frac{1}{x}y(x)$ en posant $x = \frac{1}{t}$.

On a bien montré que $4tz''(t) + 8z'(t) - tz(t) = 0$ si et seulement si $4x^4y''(x) - y(x) = 0$.

2. (a) Supposons $u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ pour $t \in]-R, R[$. On peut dériver terme à terme sur cet intervalle d'où

$$u'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \text{ et } u''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}. \text{ On en déduit:}$$

$$4tu''(t) + 8u'(t) - tu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4n(n-1) a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 8n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1}.$$

En posant $n' = n + 2$ dans le dernier sigma on obtient:

$$4tu''(t) + 8u'(t) - tu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4n(n+1) a_n t^{n-1} - \sum_{n'=2}^{+\infty} a_{n'-2} t^{n'-1} = 8a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (4n(n+1) a_n - a_{n-2}) t^{n-1}.$$

Si $4tu''(t) + 8u'(t) - tu(t) = 0$ on déduit par unicité des coefficients d'un DSE que $a_1 = 0$ et que $a_n = \frac{a_{n-2}}{4n(n+1)}$ pour $n \geq 2$.

On en déduit par récurrence immédiate que pour tout p : $a_{2p+1} = 0$.

Puis démontrons par récurrence que $a_{2p} = \frac{1}{4^p(2p+1)!}$. C'est vrai pour $p = 0$ puisque $a_0 = u(0) = 1$. Supposons la propriété vraie pour un entier p . On en déduit en posant $n = 2p + 2$ dans l'égalité obtenue pour a_n : $a_{2p+2} = \frac{a_{2p}}{4(2p+2)(2p+3)} = \frac{1}{4^p(2p+1)!4(2p+2)(2p+3)} = \frac{1}{4^{p+1}(2p+3)!}$ qui est bien la propriété voulue pour $p + 1$.

Réciproquement si la suite (a_n) vérifie pour tout p : $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{1}{4^p(2p+1)!}$ on déduit que u vérifie bien $4tu''(t) + 8u'(t) - tu(t) = 0$ et que le rayon de convergence de la série entière est infini puisque la limite en $+\infty$ de $\frac{t^{2p}}{4^p(2p+1)!}$ est nulle (c'est $(2p+1)!$ qui s'impose à t^{2p}).

(b) On vient de montrer que le rayon de convergence de la série entière est infini.

On reconnaît pour $t \neq 0$: $u(t) = \frac{2}{t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(\frac{t}{2})^{2p+1}}{(2p+1)!} = \frac{2}{t} \sinh(\frac{t}{2})$.

3. On obtient une solution de (E_1) par $y(x) = z(\frac{1}{x}) = u(\frac{1}{x}) = 2x \sinh(\frac{1}{2x})$.

La limite de $\frac{y(x)}{x}$ en $+\infty$ est bien nulle.

Troisième partie

1. (a) $|u_{n+1} - u_n| = |f((n+1)^2) - f(n^2)| \leq \frac{C}{n^2}$ pour $s = (n+1)^2 \geq u = n^2 \geq 1$. Comme la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument.

(b) La convergence absolue entraîne la convergence de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$. On en déduit la convergence de la suite $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$.

(c) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|f(n^2) - L| \leq \varepsilon$.

Pour $s \geq n^2$ on a $|f(s) - f(n^2)| \leq \frac{C}{n^2}$. Pour obtenir $\frac{C}{n^2} \leq \varepsilon$ il suffit de choisir $n \geq \sqrt{\frac{C}{\varepsilon}}$.

Soit $n_1 \geq \max(n_0, \sqrt{\frac{C}{\varepsilon}})$. Pour $s \geq n_1$ on a $|f(s) - L| \leq |f(s) - f(n_1^2)| + |f(n_1^2) - L| \leq 2\varepsilon$.

Comme ε est arbitraire on a bien montré que $f(s)$ a pour limite L quand s tend vers $+\infty$.

2. (a) Puisque $g'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ il existe $A > 0$ tel que $|g'(x)| \leq 1$ pour $x \geq A$. Comme g' est continue sur le segment $[0, A]$ elle est y est bornée: $|g'(x)| \leq M_1$.

On a donc bien $|g'(x)| \leq \max(M_1, 1) = M$ sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $f_n(t) = g'(tx_n)$ sur l'intervalle $I = [0, 1]$. f_n est continue et donc intégrable sur le segment I .

$f_n(0) = g'(0)$ et pour $t > 0$, $f_n(t)$ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout n et tout $t \in I$ on a $|f_n(t)| \leq M$ qui est intégrable sur I .

On en déduit que $\int_0^1 g'(tx_n) dt$ a pour limite $\int_0^1 0 dt = 0$ quand n tend vers $+\infty$.

Le calcul de l'intégrale donne $\int_0^1 g'(tx_n) dt = \left[\frac{g(tx_n)}{x_n} \right]_0^1 = \frac{g(x_n) - g(0)}{x_n}$ qui a donc pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme x_n tend vers $+\infty$ on déduit que $\frac{g(0)}{x_n}$ tend vers 0 et donc $\frac{g(x_n)}{x_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(c) Utilisons la caractérisation séquentielle d'une limite:

la fonction $x \mapsto \frac{g(x)}{x}$ a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour toute suite x_n qui tend vers $+\infty$ la suite $\frac{g(x_n)}{x_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. Posons $g(x) = h(x) - Lx$. On a $\frac{g(x)}{x} = \frac{h(x)}{x} - L$ et $g'(x) = h'(x) - L$.

Si $h'(x)$ a pour limite L quand x tend vers $+\infty$ alors $g'(x)$ a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$.

Par le 2., $\frac{g(x)}{x}$ a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$ donc $\frac{h(x)}{x}$ a pour limite L quand x tend vers $+\infty$.

4. On applique le 3. en se limitant à l'intervalle $[1, +\infty[$.

Quatrième partie

1. $y'(s) - y'(u) = \int_u^s y''(t)dt = - \int_u^s q(t)y(t)dt$.

2. Pour $u = 1$ on déduit du 1.: $\int_1^x (y'(s) - y'(1))ds = - \int_1^x \left(\int_1^s q(t)y(t)dt \right) ds$.

On en déduit que $y(x) - y(1) - (x-1)y'(1) = - \int_1^x \left(\int_1^s q(t)y(t)dt \right) ds$.

En divisant par x on obtient l'égalité voulue.

3. (a) La fonction $x \mapsto \left| \frac{y(x)}{x} \right|$ est continue sur le segment $[1, A]$ donc elle est bornée et y atteint son maximum.

(b) En appliquant l'inégalité triangulaire à l'égalité du 2. on obtient avec $x \geq 1$ et $\left| \frac{x-1}{x} \right| \leq 1$:

$\left| \frac{y(x)}{x} \right| \leq |y(1)| + |y'(1)| + \frac{1}{x} \int_1^x \left(\int_1^s |q(t)y(t)|dt \right) ds$. Avec $|y(t)| \leq M_A t$ on obtient l'inégalité voulue.

(c) $\int_1^s |tq(t)|dt \leq \int_1^{+\infty} |tq(t)|dt = r$ donc pour tout x on a:

$\left| \frac{y(x)}{x} \right| \leq |y(1)| + |y'(1)| + \frac{M_A}{x} \int_1^x rds \leq |y(1)| + |y'(1)| + M_A r$.

Cela entraîne que $M_A \leq |y(1)| + |y'(1)| + M_A r$ d'où $M_A \leq \frac{|y(1)| + |y'(1)|}{1-r}$.

4. Pour tout $A > 1$ on a pour $x \in [1, A]$: $\left| \frac{y(x)}{x} \right| \leq M_A \leq \frac{|y(1)| + |y'(1)|}{1-r}$. Par suite on a pour tout $x \geq 1$:

$\left| \frac{y(x)}{x} \right| \leq \frac{|y(1)| + |y'(1)|}{1-r} = M$. La fonction $x \mapsto \frac{y(x)}{x}$ est bornée par M sur $[1, +\infty[$.

5. (a) $|y'(s) - y'(u)| \leq \int_u^s |q(t)y(t)|dt \leq \int_u^s Mt|q(t)|dt \leq \int_u^s M \frac{t^2}{u} |q(t)|dt$ puisque $1 \leq \frac{t}{u}$.

Donc $|y'(s) - y'(u)| \leq \frac{M}{u} \int_1^{+\infty} t^2 |q(t)|dt = \frac{K}{u}$.

Il suffit d'appliquer le résultat du 1. de la troisième partie avec $f = y'$ pour obtenir que $y'(x)$ possède une limite L en $+\infty$.

(b) Il suffit d'appliquer le résultat du 4. de la troisième partie avec $u = y$ pour obtenir que $\frac{y(x)}{x}$ a pour limite L en $+\infty$.

6. Pour l'équation différentielle (E_1) de la seconde partie on a $q(x) = -\frac{1}{4x^4}$. Cette fonction est continue sur $[1, +\infty[$ et de plus la fonction $x \mapsto x^2 q(x) = -\frac{1}{4x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, ce qui entraîne que $x \mapsto xq(x) = -\frac{1}{4x^3}$ y est aussi intégrable. On peut donc appliquer le résultat du 5.(b) et $\frac{y(x)}{x}$ a une limite L en $+\infty$.