

X-ENS 2022 MP maths A

Adrien JOSEPH

Partie I

1a. On note S la sphère de E de centre 0 et de rayon 1. Comme E est de dimension finie, l'application bilinéaire $f : (x, y) \in E^2 \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue, S est compact et V est fermé (donc $V \cap S$ est compact). Comme $p \geq 1$, on dispose de $x_1 \in V \setminus \{0\}$ donc $\frac{1}{\|x_1\|}x_1 \in V \cap S$ et $V \cap S \neq \emptyset$. De même, $V' \cap S$ est un compact non vide. On en déduit finalement que la restriction de f à $(V \cap S) \times (V' \cap S)$ est majorée et atteint sa borne supérieure, ce qui donne le résultat.

Remarque. On n'a pas utilisé le fait que $\dim(V) = \dim(V')$ mais seulement que les dimensions de V et de V' sont non nulles.

1b. On construit une telle famille par récurrence sur $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Si $k = 1$: c'est la question précédente.

Soit $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$ tel que u_1, \dots, u_{k-1} et u'_1, \dots, u'_{k-1} soient construits de manière idoine. On pose

$$W = V \cap (\mathbb{R}u_1)^\perp \cap \dots \cap (\mathbb{R}u_{k-1})^\perp \quad \text{et} \quad W' = V' \cap (\mathbb{R}u'_1)^\perp \cap \dots \cap (\mathbb{R}u'_{k-1})^\perp.$$

Montrons que les dimensions de W et de W' sont non nulles. Nous allons pour ce faire utiliser le lemme suivant, que nous établirons à l'issue de cette question.

Lemme. Si F est un sev de E de dimension p alors pour tout $\ell \in \llbracket 2, p \rrbracket$ et pour tous hyperplans $H_1, \dots, H_{\ell-1}$ de E , $\dim(F \cap H_1 \cap \dots \cap H_{\ell-1}) \geq p - \ell + 1$.

Puisque les u_i sont non nuls (puisque de norme 1), les $(\mathbb{R}u_i)^\perp$ sont des hyperplans de E donc, d'après le lemme, $\dim(W) \geq p - k + 1 \geq 1$. De même, W' est de dimension non nulle. D'après la question précédente (rappelons que nous n'avons pas utilisé l'égalité des dimensions des sev mis en jeu), on dispose donc de $u_k \in W \cap S$ et de $u'_k \in W' \cap S$ tels que

$$\langle u_k, u'_k \rangle = \sup\{\langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in W \times W', \|a\| = \|a'\| = 1\},$$

ce qui donne le résultat.

Preuve du lemme. On établit le résultat par récurrence sur $\ell \in \llbracket 2, p \rrbracket$.

Si $\ell = 2$: pour tout hyperplan H_1 de E , $\dim(F \cap H_1) = \dim(F) + \dim(H_1) - \dim(F + H_1) \geq p + (d-1) - d = p-1 = p-\ell+1$.

Soit $\ell \in \llbracket 3, p \rrbracket$ tel que pour tous hyperplans $H_1, \dots, H_{\ell-2}$ de E , $\dim(F \cap H_1 \cap \dots \cap H_{\ell-2}) \geq p - \ell + 2$. Soit $H_1, \dots, H_{\ell-1}$ des hyperplans de E . Alors

$$\begin{aligned} \dim(F \cap H_1 \cap \dots \cap H_{\ell-1}) &= \dim((F \cap H_1 \cap \dots \cap H_{\ell-2}) \cap H_{\ell-1}) \\ &= \dim(F \cap H_1 \cap \dots \cap H_{\ell-2}) + \dim(H_{\ell-1}) - \dim((F \cap H_1 \cap \dots \cap H_{\ell-2}) + H_{\ell-1}) \\ &\geq (p - \ell + 2) + (d - 1) - d = p - \ell + 1. \end{aligned}$$

D'où le lemme.

2. Supposons $\dim(V \cap V') \geq 1$. Montrons que pour tout $k \in \llbracket 1, \dim(V \cap V') \rrbracket$, $u_k = u'_k$. On procède par récurrence sur k .

Montrons tout d'abord que $u_1 = u'_1$. Par hypothèse, on dispose de $x \in (V \cap V') \setminus \{0\}$. Alors, en posant $a = \frac{1}{\|x\|}x$ puis

$a' = a$, $(a, a') \in V \times V'$ et $\|a\| = \|a'\| = 1$ donc par définition de u_1 et u'_1 , $\langle u_1, u'_1 \rangle \geq \langle a, a' \rangle$, i.e. $\langle u_1, u'_1 \rangle \geq 1$. Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle u_1, u'_1 \rangle \leq \|u_1\| \|u'_1\| = 1$. Il y a donc égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : la famille (u_1, u'_1) est positivement liée. Comme $u_1 \neq 0$, on dispose donc de $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $u'_1 = \lambda u_1$. Donc $1 = \|u'_1\| = \lambda \|u_1\| = \lambda$ puis $u'_1 = u_1$.

Soit $k \in \llbracket 2, \dim(V \cap V') \rrbracket$ tel que $u_1 = u'_1, \dots, u_{k-1} = u'_{k-1}$. Montrons que $u_k = u'_k$. D'après le lemme établi à la question précédente (rappelons que les u_i sont non nuls puisque de norme 1),

$$\dim(V \cap V' \cap (\mathbb{R}u_1)^\perp \cap \dots \cap (\mathbb{R}u_{k-1})^\perp) \geq \dim(V \cap V') - (k-1) \geq 1$$

donc on dispose de $y \in (V \cap V' \cap (\mathbb{R}u_1)^\perp \cap \dots \cap (\mathbb{R}u_{k-1})^\perp) \setminus \{0\}$. Alors, en posant $a = \frac{1}{\|y\|}y$ puis $a' = a$, $(a, a') \in V \times V'$, $\|a\| = \|a'\| = 1$ et pour tout $\ell \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $\langle a, u_\ell \rangle = \langle a', u'_\ell \rangle = 0$ (rappelons que par hypothèse $u'_\ell = u_\ell$). Par définition de u_k et u'_k , on en déduit que $\langle u_k, u'_k \rangle \geq \langle a, a' \rangle$, i.e. $\langle u_k, u'_k \rangle \geq 1$. Le même raisonnement que celui ayant permis d'obtenir $u_1 = u'_1$ donne alors $u_k = u'_k$, d'où le résultat.

3a. D'après la question **1b**, u est une famille orthonormée de vecteurs de V contenant $p = \dim V$ vecteurs ; on en déduit que u est une base orthonormée de V .

3b. Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket k+1, p \rrbracket$. Comme (u_k, u_ℓ) est une sous-famille de la famille orthonormée u , (u_k, u_ℓ) est une famille orthonormée donc est libre ; on peut donc bien considérer la fonction $g : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\|u_k + tu_\ell\|}(u_k + tu_\ell)$. Notons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) \in V$, $\|g(t)\| = 1$ et pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $\langle g(t), u_i \rangle = \frac{1}{\|u_k + tu_\ell\|}(\langle u_k, u_i \rangle + t \langle u_\ell, u_i \rangle) = 0$. Par ailleurs, $u'_k \in V$, $\|u'_k\| = 1$ et pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $\langle u'_k, u'_i \rangle = 0$. On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\langle u_k, u'_k \rangle \geq \langle g(t), u'_k \rangle$, i.e. $\langle g(0), u'_k \rangle \geq \langle g(t), u'_k \rangle$: la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \langle g(t), u'_k \rangle$ présente un maximum global en 0. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\langle g(t), u'_k \rangle = (\|u_k + tu_\ell\|^2)^{-1} \langle u_k, u'_k \rangle + t \frac{\langle u_\ell, u'_k \rangle}{\|u_k + tu_\ell\|} = (1 + 2t \langle u_k, u_\ell \rangle + t^2)^{-1} \langle u_k, u'_k \rangle + t(\langle u_\ell, u'_k \rangle + \underset{t \rightarrow 0}{o}(1))$$

donc

$$\langle g(t), u'_k \rangle = (1 + t^2)^{-1} \langle u_k, u'_k \rangle + t \langle u_\ell, u'_k \rangle + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t) = (1 + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t)) \langle u_k, u'_k \rangle + t \langle u_\ell, u'_k \rangle + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t) = \langle u_k, u'_k \rangle + t \langle u_\ell, u'_k \rangle + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t),$$

ce qui montre que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \langle g(t), u'_k \rangle$ est dérivable en 0 de nombre dérivé en 0 égal à $\langle u_\ell, u'_k \rangle$. On en déduit finalement que $\langle u_\ell, u'_k \rangle = 0$, et ce pour tout $\ell \in \llbracket k+1, p \rrbracket$; ceci prouve que $u'_k \in \text{Vect}(u_{k+1}, \dots, u_p)^\perp$.

3c. Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Comme u est une famille orthonormée, $u_{k+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)^\perp$. Par ailleurs, pour tout $\ell \in \llbracket 1, k \rrbracket$, la question précédente assure que $\langle u_{k+1}, u'_\ell \rangle = 0$, donc $u_{k+1} \in \text{Vect}(u'_1, \dots, u'_k)^\perp$. Ainsi $u_{k+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)^\perp \cap \text{Vect}(u'_1, \dots, u'_k)^\perp$, i.e. $u_{k+1} \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) + \text{Vect}(u'_1, \dots, u'_k))^\perp$.

3d. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ tel que $k < \ell$. Soit $(x, y) \in W_k \times W_\ell$: on dispose de $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x = \lambda_1 u_k + \mu_1 u'_k$ et $y = \lambda_2 u_\ell + \mu_2 u'_\ell$. Alors $\langle x, y \rangle = \lambda_1 \lambda_2 \langle u_k, u_\ell \rangle + \lambda_1 \mu_2 \langle u_k, u'_\ell \rangle + \mu_1 \lambda_2 \langle u'_k, u_\ell \rangle + \mu_1 \mu_2 \langle u'_k, u'_\ell \rangle$. Comme u et u' sont orthogonales, $\langle x, y \rangle = \lambda_1 \mu_2 \langle u_k, u'_\ell \rangle + \mu_1 \lambda_2 \langle u'_k, u_\ell \rangle$. Or, d'après la question **3b**, $\langle u'_k, u_\ell \rangle = 0$, et comme les familles u et u' jouent un rôle symétrique, $\langle u_k, u'_\ell \rangle = 0$. Finalement, $\langle x, y \rangle = 0$. D'où le résultat.

4a. La question revient à montrer que $0 \leq \langle u_p, u'_p \rangle \leq \dots \leq \langle u_1, u'_1 \rangle \leq 1$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que $\langle u_1, u'_1 \rangle \leq \|u_1\| \|u'_1\|$ donc $\langle u_1, u'_1 \rangle \leq 1$. Par ailleurs, pour tout $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$, comme pour tout $\ell \in \llbracket 1, k-2 \rrbracket$, $\langle u_k, u_\ell \rangle = \langle u'_k, u'_\ell \rangle = 0$, $u_k \in V \cap S$ et $u'_k \in V' \cap S$, on a : $\langle u_{k-1}, u'_{k-1} \rangle \geq \langle u_k, u'_k \rangle$. Enfin, comme pour tout $\ell \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $\langle -u_p, u_\ell \rangle = \langle u'_p, u'_\ell \rangle = 0$, $-u_p \in V \cap S$ et $u'_p \in V' \cap S$, on a : $\langle u_p, u'_p \rangle \geq \langle -u_p, u'_p \rangle = -\langle u_p, u'_p \rangle$ donc $\langle u_p, u'_p \rangle \geq 0$. Finalement, $0 \leq \langle u_p, u'_p \rangle \leq \dots \leq \langle u_1, u'_1 \rangle \leq 1$ donc en passant à arccos (qui est une fonction décroissante), on obtient :

$$\frac{\pi}{2} = \arccos(0) \geq \arccos(\langle u_p, u'_p \rangle) \geq \dots \geq \arccos(\langle u_1, u'_1 \rangle) \geq \arccos(1) = 0.$$

En posant pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\theta_k = \arccos(\langle u_k, u'_k \rangle)$, on obtient le résultat.

4b. D'après la question **3b** (rappelons que les familles u et u' jouent un rôle symétrique), la matrice $\text{Gram}(u, u')$ est diagonale. Ses coefficients diagonaux étant d'après la question précédente les $\cos(\theta_k)$, on a donc : $\det(\text{Gram}(u, u')) = \prod_{k=1}^p \cos(\theta_k)$.

4c. Puisque pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\theta_k \in [0, \pi/2]$, on a : $\cos(\theta_k) \in [0, 1]$. Ainsi, d'après la question précédente, d'une part, $\boxed{\det(\text{Gram}(u, u')) \leq 1}$ et, d'autre part, $\det(\text{Gram}(u, u')) = 1$ si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\cos(\theta_k) = 1$ si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\langle u_k, u'_k \rangle = 1$ si et seulement si (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les u_k et les u'_k étant unitaires) pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_k = u'_k$. Montrons que cette dernière condition est équivalente à $V = V'$. Le sens direct est trivial puisque u (resp. u') est une famille génératrice de V (resp. V') d'après la question **3a**. Si réciproquement $V = V'$ alors, d'après la question **2**, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_k = u'_k$. Finalement, $\boxed{\det(\text{Gram}(u, u')) = 1}$ si et seulement si $V = V'$.

Partie II

5a. L'application donnée dans l'énoncé est le déterminant dans la base canonique de \mathbb{R}^p , $\boxed{\text{d'où le résultat}}$.

5b. La linéarité par rapport à chacune des variables de g vient de la linéarité de f et de la linéarité par rapport à chacune des variables du produit mixte (et du fait que la composée de deux fonctions linéaires est linéaire). Le caractère alterné de g vient du caractère alterné du produit mixte. Finalement, $\boxed{g \in \mathcal{A}_p(F, \mathbb{R})}$.

6a. Soit $e \in E^p$. La bilinéarité du produit scalaire et la p -linéarité du déterminant d'une matrice relativement à ses colonnes donne la p -linéarité de $\Omega_p(e)$. Le caractère alterné du déterminant d'une matrice relativement à ses colonnes donne le caractère alterné de $\Omega_p(e)$. Finalement, $\boxed{\Omega_p(e) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})}$.

Remarque. On aurait également pu appliquer la question précédente avec $F = E$ et $f : u \mapsto (\langle e_i, u \rangle)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$.

6b. Le déterminant de la transposée M^\top d'une matrice carrée M étant égal au déterminant de M et le produit scalaire étant symétrique, $\boxed{\text{on a le résultat}}$.

6c. La question précédente, la bilinéarité du produit scalaire et la p -linéarité du déterminant d'une matrice relativement à ses colonnes donne la p -linéarité de Ω_p . La question précédente et le caractère alterné du déterminant d'une matrice relativement à ses colonnes donne le caractère alterné de Ω_p . Finalement, $\boxed{\Omega_p \in \mathcal{A}_p(E, \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}))}$.

7a. Soit $u = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$. Notons L_1, \dots, L_p les lignes de $\text{Gram}(e, u)$ et L'_1, \dots, L'_p les lignes de $\text{Gram}(e', u)$. Notons que par bilinéarité du produit scalaire, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$L'_i = \sum_{j_i=1}^p M_{i,j_i} L_{j_i}$$

donc par p -linéarité du déterminant d'une matrice relativement à ses lignes, on a :

$$\Omega_p(e')(u) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_p \leq p} M_{1,j_1} \dots M_{p,j_p} \det(L_{j_1}, \dots, L_{j_p}),$$

où $\det(L_{j_1}, \dots, L_{j_p})$ désigne le déterminant de la matrice dont la i -ème ligne est L_{j_i} . Comme le déterminant est alterné, les termes de la somme pour lesquels deux j_i sont égaux sont nuls, donc

$$\Omega_p(e')(u) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} M_{1,\sigma(1)} \dots M_{p,\sigma(p)} \det(L_{\sigma(1)}, \dots, L_{\sigma(p)}).$$

Comme le déterminant d'une matrice est alterné relativement à ses lignes, on a donc

$$\Omega_p(e')(u) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} M_{1,\sigma(1)} \dots M_{p,\sigma(p)} \epsilon(\sigma) \det(L_1, \dots, L_p).$$

Finalement $\Omega_p(e')(u) = \det(M)\Omega_p(e)(u)$, et ce pour tout $u \in E^p$. D'où $\boxed{\Omega_p(e') = \det(M)\Omega_p(e)}$.

7b. On écrit $e = (e_1, \dots, e_p)$.

Supposons e liée. On dispose de $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que e_i soient combinaison linéaire des e_j ($j \neq i$). Alors pour tout $u \in E^p$, la i -ème ligne de $\text{Gram}(e, u)$ est combinaison linéaire des autres lignes donc $\text{Gram}(e, u)$ n'est pas inversible et $\Omega_p(e)(u) = 0$. Donc $\Omega_p(e) = 0$.

Supposons e libre. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille libre e et notons $b = (b_1, \dots, b_p)$ la famille orthonormée obtenue. Notons que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\langle b_i, e_i \rangle > 0$ et $e_i = \sum_{j=1}^i \langle b_j, e_i \rangle b_j$. Notons

A la matrice $[\langle b_j, e_i \rangle]_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2}$, i.e. $A = \text{Gram}(e, b)$. Remarquons que A est triangulaire inférieure et que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs donc $\det(A) > 0$. Posons $M = A^{-1}$. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $b_i = \sum_{j=1}^p M_{i,j} e_j$

donc d'après la question précédente $\Omega_p(b) = \det(M)\Omega_p(e)$, i.e. $\Omega_p(b) = \det(A)^{-1}\Omega_p(e)$. Donc $\Omega_p(e) = \det(A)\Omega_p(b)$ puis $\Omega_p(e)(e) = \det(A)\Omega_p(b)(e) = \det(A)^2 > 0$. On en déduit en particulier que $\Omega_p(e) \neq 0$.

Finalement, on a bien montré que $\boxed{\Omega_p(e) \neq 0 \text{ si et seulement si } e \text{ est libre}}$.

7c. Soit $e \in E^p$. Si e est liée, la question précédente assure que $\Omega_p(e) = 0$ donc $\Omega_p(e)(e) = 0$. Si e est libre, nous avons vu au cours de la preuve de la question précédente que $\Omega_p(e)(e) > 0$. Finalement, $\boxed{\text{pour tout } e \in E^p, \Omega_p(e)(e) \geq 0}$.

8a. Supposons b orthonormée. Alors $\text{Gram}(e, e) = I_p$ donc $\Omega_p(e)(e) = 1$ et $\boxed{\text{vol}_p(b) = 1}$.

8b. Notons $f_1 = \text{pr}(e_1)$ et $g_1 = e_1 - f_1$: alors $f_1 \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_p)^\perp$, $g_1 \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_p)$ et $e_1 = f_1 + g_1$. On dispose en particulier de $(\lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p-1}$ tel que $g_1 = \sum_{k=2}^p \lambda_k e_k$. Notons C_1, \dots, C_p les colonnes de $\text{Gram}(e, e)$; la colonne C_1 s'écrit

$$C_1 = \left(\left\langle e_i, f_1 + \sum_{k=2}^p \lambda_k e_k \right\rangle \right)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}.$$

Alors l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - \sum_{k=2}^p \lambda_k C_k$ n'affecte pas le déterminant $\Omega_p(e)(e)$ de $\text{Gram}(e, e)$. La première colonne de la

nouvelle matrice est $(\langle e_i, f_1 \rangle)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$, i.e. (rappelons que $f_1 \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_p)^\perp$) $(\langle e_1, f_1 \rangle, 0, \dots, 0)^\top$. Les autres colonnes n'ont pas été modifiées. Ainsi, $\Omega_p(e)(e) = \langle e_1, f_1 \rangle \Omega_{p-1}(e_2^p)(e_2^p)$. Notons enfin que $\langle e_1, f_1 \rangle = \langle f_1 + g_1, f_1 \rangle = \langle f_1, f_1 \rangle + \langle g_1, f_1 \rangle = \|f_1\|^2 = \|\text{pr}(e_1)\|^2$. On conclut que $\Omega_p(e)(e) = \|\text{pr}(e_1)\|^2 \Omega_{p-1}(e_2^p)(e_2^p)$ puis que $\boxed{\text{vol}_p(e) = \|\text{pr}(e_1)\| \text{vol}_{p-1}(e_2^p)}$.

8c. Établissons l'inégalité par récurrence sur p . Le résultat est clair si $p = 1$. Soit $p \in \llbracket 2, d \rrbracket$ tel que pour toute famille

libre $e = (e_1, \dots, e_{p-1}) \in E^{p-1}$, $\text{vol}_{p-1}(e) \leq \prod_{i=1}^{p-1} \|e_i\|$. Soit alors $e = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$ une famille libre. En reprenant

les notations de la question précédente, $\text{vol}_p(e) = \|\text{pr}(e_1)\| \text{vol}_{p-1}(e_2^p)$. Or, $e_1 = \text{pr}(e_1) + (e_1 - \text{pr}(e_1))$ et $\text{pr}(e_1)$ et $e_1 - \text{pr}(e_1)$ sont orthogonaux donc d'après le théorème de Pythagore, $\|e_1\|^2 = \|\text{pr}(e_1)\|^2 + \|e_1 - \text{pr}(e_1)\|^2 \geq \|\text{pr}(e_1)\|^2$. Ainsi $\text{vol}_p(e) \leq \|e_1\| \text{vol}_{p-1}(e_2^p)$. Or, par hypothèse de récurrence, comme e_2^p est libre en tant que sous-famille de la famille

libre e , $\text{vol}_{p-1}(e_2^p) \leq \prod_{i=2}^p \|e_i\|$. Finalement $\boxed{\text{vol}_p(e) \leq \prod_{i=1}^{p-1} \|e_i\|}$.

Établissons le cas d'égalité. Si la famille e est orthogonale alors $\text{Gram}(e)(e)$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont

les $\|e_i\|^2$ donc $\text{vol}_p(e) = \prod_{i=1}^{p-1} \|e_i\|$. Montrons maintenant la réciproque par récurrence sur p . Le résultat est clair si $p = 1$. Soit

$p \in \llbracket 2, d \rrbracket$ tel que pour toute famille libre $e = (e_1, \dots, e_{p-1}) \in E^{p-1}$ vérifiant $\text{vol}_{p-1}(e) = \prod_{i=1}^{p-1} \|e_i\|$, on a : e est une famille

orthogonale. Soit alors $e = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$ une famille libre vérifiant $\text{vol}_p(e) = \prod_{i=1}^p \|e_i\|$. En reprenant les notations de la

question précédente, on a donc : $\|\text{pr}(e_1)\| \text{vol}_{p-1}(e_2^p) = \|e_1\| \prod_{i=2}^p \|e_i\|$. Or, on sait que $\|\text{pr}(e_1)\| \leq \|e_1\|$ et que, la famille e_2^p

étant libre (cf. début de cette question), $\text{vol}_{p-1}(e_2^p) \leq \prod_{i=2}^p \|e_i\|$. Comme les deux réels $\|\text{pr}(e_1)\|$ et $\text{vol}_{p-1}(e_2^p)$ sont strictement positifs (puisque leur produit est égal à $\prod_{i=1}^p \|e_i\| \neq 0$), on en déduit que $\|\text{pr}(e_1)\| = \|e_1\|$ et que $\text{vol}_{p-1}(e_2^p) = \prod_{i=2}^p \|e_i\|$. Comme $\|e_1\|^2 = \|\text{pr}(e_1)\|^2 + \|e_1 - \text{pr}(e_1)\|^2$, cela montre que $e_1 - \text{pr}(e_1) = 0$ donc $e_1 \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_p)^\perp$. Par ailleurs, l'hypothèse de récurrence assure que la famille libre e_2^p est orthogonale. On conclut que la famille libre e est orthogonale.

Finalement, on a bien montré que pour toute famille libre $e \in E^p$, $\text{vol}_p(e) = \prod_{i=1}^p \|e_i\|$ si et seulement si e est orthogonale.

9a. D'après la question **7a**, $\Omega_p(e) = \det((P_b^e)^\top) \Omega_p(b) = \det(P_b^e) \Omega_p(b)$ donc $\Omega_p(e)(e) = \det(P_b^e) \Omega_p(b)(e)$, i.e. $\Omega_p(e)(e) = \det(P_b^e) \det(\text{Gram}(b, e))$. Or, comme b est une base orthonormée de $\text{Vect}(e)$, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $e_j = \sum_{i=1}^p \langle b_i, e_j \rangle b_i$ donc $\text{Gram}(b, e) = P_b^e$. D'où $\Omega_p(e)(e) = \det(P_b^e)^2$ et $\text{vol}_p(e) = |\det(P_b^e)|$.

9b. Soit $(e, e') \in (E^p)^2$. Distinguons deux cas. Si e est liée ou e' est liée alors d'après les questions **7b** et **6b**, $\Omega_p(e)(e') = 0$ donc le résultat est clair. Supposons maintenant e et e' libres. Posons $V = \text{Vect}(e)$ et $V' = \text{Vect}(e')$. Alors V et V' sont deux sous-espaces de E de dimension p : on peut appliquer les résultats de la partie **I**. Notons u et u' deux familles construites comme à la question **1**. D'après la question question **3a**, u est une base orthonormée de V donc d'après la question **7a**,

$$\Omega_p(e) = \det(P_u^e) \Omega_p(u)$$

donc d'après les questions **6b** puis à nouveau **3a** et **7a** :

$$\Omega_p(e)(e') = \det(P_u^e) \Omega_p(e')(u) = \det(P_u^e) \det(P_{u'}^{e'}) \Omega_p(u')(u).$$

La question précédente et les questions **3a** puis **6b** assurent alors que

$$|\Omega_p(e)(e')| = \text{vol}_p(e) \text{vol}_p(e') |\det(\text{Gram}(u, u'))|.$$

Or, la question **4b** assure que $\det(\text{Gram}(u, u')) \geq 0$ et la question **4c** indique que $\det(\text{Gram}(u, u')) \leq 1$. On peut maintenant conclure : $|\Omega_p(e)(e')| \leq \text{vol}_p(e) \text{vol}_p(e')$.

Partie III

10a. Soit $\omega \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$. Comme e est une base orthonormée de E , pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_j = \sum_{i=1}^d \langle e_i, x_j \rangle e_i$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, d \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $x_{i,j} = \langle e_i, x_j \rangle$. Alors par p -linéarité de ω ,

$$\omega(x_1, \dots, x_p) = \omega \left(\sum_{i_1=1}^d x_{i_1,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_p=1}^d x_{i_p,p} e_{i_p} \right) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq d} x_{i_1,1} \dots x_{i_p,p} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

Le caractère alterné de ω assure alors que

$$\omega(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i_1, \dots, i_p \text{ deux à deux distincts}} x_{i_1,1} \dots x_{i_p,p} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

On regroupe alors les p -listes (i_1, \dots, i_p) déléments distincts de $\llbracket 1, d \rrbracket$ selon leur support :

$$\omega(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \llbracket 1, d \rrbracket^p \text{ de support } \alpha} x_{i_1,1} \dots x_{i_p,p} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$$

i.e.

$$\omega(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\alpha=(i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{I}_p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} x_{i_{\sigma(1)},1} \dots x_{i_{\sigma(p)},p} \omega(e_{i_{\sigma(1)}} \dots e_{i_{\sigma(p)}}).$$

Le caractère alterné de ω assure alors que

$$\omega(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\alpha=(i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{I}_p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} x_{i_{\sigma(1)}, 1} \dots x_{i_{\sigma(p)}, p} (\epsilon(\sigma) \omega(e_\alpha)).$$

Ainsi

$$\omega(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\alpha=(i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(\sigma) x_{i_{\sigma(1)}, 1} \dots x_{i_{\sigma(p)}, p}.$$

Rappelons enfin que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, d \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_{i,j} = \langle e_i, x_j \rangle$. On en déduit que

$$\omega(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha)(x_1, \dots, x_p).$$

D'où finalement
$$\omega = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha).$$

10b. Il est clair que l'application $(\omega, \omega') \mapsto \langle \omega, \omega' \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive. Par ailleurs, pour tout $\omega \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ telle que $\langle \omega, \omega \rangle = 0$, on a : pour tout $\alpha \in \mathcal{I}_p$, $\omega(e_\alpha) = 0$ donc, d'après la question précédente, $\omega = 0$. Finalement, $(\omega, \omega') \mapsto \langle \omega, \omega' \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

Montrons que $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{I}_p}$ est une base orthonormée de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$. Notons que, d'après la question **6a**, il s'agit bien d'une famille d'éléments de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathcal{I}_p^2$ tel que $\alpha \neq \beta$. Alors pour tout $\gamma \in \mathcal{I}_p$, $\gamma \neq \alpha$ ou $\gamma \neq \beta$; si $\gamma \neq \alpha$, alors la matrice $\text{Gram}(e_\alpha, e_\gamma)$ possède une colonne nulle puisque l'une des composantes de γ n'est pas dans le support de α et que la famille e est orthogonale, ce qui implique que $\Omega_p(e_\alpha)(e_\gamma) = 0$. De même, si $\gamma \neq \beta$, alors $\Omega_p(e_\beta)(e_\gamma) = 0$. On en déduit que $\sum_{\gamma \in \mathcal{I}_p} \Omega_p(e_\alpha)(e_\gamma) \Omega_p(e_\beta)(e_\gamma) = 0$, i.e. $\langle \Omega_p(e_\alpha), \Omega_p(e_\beta) \rangle = 0$. Par ailleurs, $\|\Omega_p(e_\alpha)\|^2 = \sum_{\gamma \in \mathcal{I}_p} \Omega_p(e_\alpha)(e_\gamma)^2 =$

$\Omega_p(e_\alpha)(e_\alpha)^2 = 1$ d'après la question **8a**. Finalement, $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{I}_p}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$. Elle est en particulier libre. Par ailleurs, d'après la question précédente, c'est une famille génératrice de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$. On conclut que

$$(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \text{ est une base orthonormée de } \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}).$$

Comme \mathcal{I}_p est un ensemble fini de cardinal $\binom{d}{p}$, on en déduit que $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie égale à $\binom{d}{p}$.

10c. Posons, pour tout $x_1 \in E$, $\phi(x_1)$ l'application qui à $(x_2, \dots, x_d) \in E^{d-1}$ associe $\det_{(e_1, \dots, e_d)}(x_1, \dots, x_d)$. La d -linéarité et le caractère alterné de $\det_{(e_1, \dots, e_d)}$ assurent que pour tout $x_1 \in E$, $\phi(x_1) \in \mathcal{A}_{d-1}(E, \mathbb{R})$. Montrons que $\phi : x_1 \in E \mapsto \phi(x_1) \in \mathcal{A}_{d-1}(E, \mathbb{R})$ est une isométrie entre E et $\mathcal{A}_{d-1}(E, \mathbb{R})$. La d -linéarité de $\det_{(e_1, \dots, e_d)}$ assure que ϕ est linéaire. Montrons qu'il existe une base orthonormée de E qui s'envoie sur une base orthonormée de $\mathcal{A}_{d-1}(E, \mathbb{R})$, ce qui établira le résultat. Montrons plus précisément que $(\phi(e_1), \dots, \phi(e_d))$ est une base orthonormée de $\mathcal{A}_{d-1}(E, \mathbb{R})$. Montrons encore plus précisément que pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\phi(e_i) = (-1)^{i-1} \Omega_{d-1}(e_{(1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, d)})$. Soit $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \in E^{d-1}$. D'une part

$$\phi(e_i)(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) = \det_{(e_1, \dots, e_d)}(e_i, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d).$$

En développant ce déterminant par rapport à la première colonne, et puisque que e est une base orthonormée de E , on voit que

$$\det_{(e_1, \dots, e_d)}(e_i, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) = (-1)^{i-1} \det(\text{Gram}((e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_d), (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d))).$$

Comme d'autre part

$$\Omega_{d-1}(e_{(1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, d)})(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) = \det(\text{Gram}((e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_d), (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d))),$$

on en déduit finalement que pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\phi(e_i) = (-1)^{i-1} \Omega_{d-1}(e_{(1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, d)})$. La question précédente assure alors que la base orthonormée e de E s'envoie par ϕ sur une base orthonormée de $\mathcal{A}_{d-1}(E, \mathbb{R})$ donc ϕ est une isométrie.

11. D'après les questions **6a** et **10a**, $\Omega_p(u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \Omega_p(u)(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha)$ donc, en appliquant la question **6b**, $\Omega_p(u)(v) =$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \Omega_p(u)(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha)(v) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \Omega_p(u)(e_\alpha) \Omega_p(v)(e_\alpha), \text{ i.e. } \Omega_p(u)(v) = \langle \Omega_p(u), \Omega_p(v) \rangle.$$

12. Soit f une base orthonormée de E . Notons, pour tous ω et ω' éléments de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$, $\langle \omega, \omega' \rangle_f = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(f_\alpha) \omega'(f_\alpha)$.

Alors pour tous ω et ω' éléments de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$, d'après la question **10a**,

$$\langle \omega, \omega' \rangle_f = \left\langle \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha), \sum_{\beta \in \mathcal{I}_p} \omega'(e_\beta) \Omega_p(e_\beta) \right\rangle_f = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{I}_p^2} \omega(e_\alpha) \omega'(e_\beta) \langle \Omega_p(e_\alpha), \Omega_p(e_\beta) \rangle_f$$

donc d'après la question précédente appliquée deux fois

$$\langle \omega, \omega' \rangle_f = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{I}_p^2} \omega(e_\alpha) \omega'(e_\beta) \Omega_p(e_\alpha)(e_\beta) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{I}_p^2} \omega(e_\alpha) \omega'(e_\beta) \langle \Omega_p(e_\alpha), \Omega_p(e_\beta) \rangle$$

i.e.

$$\langle \omega, \omega' \rangle_f = \left\langle \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha), \sum_{\beta \in \mathcal{I}_p} \omega'(e_\beta) \Omega_p(e_\beta) \right\rangle,$$

ce qui montre, d'après la question **10a**, que $\langle \omega, \omega' \rangle_f = \langle \omega, \omega' \rangle$, et ce pour tous ω et ω' éléments de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$. D'où le résultat.

Partie IV

13a. Soit e et e' deux familles libres de cardinal p de E .

Si $\text{Vect}(e) = \text{Vect}(e')$ alors d'après la question **7a**, $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ sont colinéaires.

Supposons réciproquement $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ colinéaires. Comme e et e' sont libres, la question **7b** assure que $\Omega_p(e) \neq 0$ et $\Omega_p(e') \neq 0$ donc on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\Omega_p(e') = \lambda \Omega_p(e)$. Notons $V = \text{Vect}(e)$ et $V' = \text{Vect}(e')$. Alors $\dim(V) = \dim(V') = p$. Nous pouvons donc appliquer les résultats de la partie **I** : notons u (resp. u') une famille de vecteurs de V (resp. V') construite à la question **1**. D'après les questions **3a**, **7a** et **7b**, on dispose de $(\mu, \mu') \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $\Omega_p(e) = \mu \Omega_p(u)$ et $\Omega_p(e') = \mu' \Omega_p(u')$. Ainsi

$$\Omega_p(u') = \frac{\lambda \mu}{\mu'} \Omega_p(u).$$

Donc d'après la question **8a**, $\Omega_p(u')(u) = \frac{\lambda \mu}{\mu'} \Omega_p(u)(u) = \frac{\lambda \mu}{\mu'}$. De même, $\Omega_p(u)(u') = \frac{\mu'}{\lambda \mu} \Omega_p(u')(u') = \frac{\mu'}{\lambda \mu}$. On en déduit

d'après la question **6b** que $\frac{\lambda \mu}{\mu'} = \frac{\mu'}{\lambda \mu}$. On dispose donc de $\sigma \in \{1, -1\}$ tel que

$$\Omega_p(u') = \sigma \Omega_p(u).$$

Donc

$$\det(\text{Gram}(u, u')) = \Omega_p(u)(u') = \sigma \Omega_p(u')(u') = \sigma.$$

Or, d'après la question **4b**, $\det(\text{Gram}(u, u')) \geq 0$. Donc $\det(\text{Gram}(u, u')) = 1$. D'après la question **4b**, on conclut que $V = V'$, *i.e.* $\text{Vect}(e) = \text{Vect}(e')$.

Finalement, pour toutes familles libres e et e' de cardinal p de E , $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ sont colinéaires ssi $\text{Vect}(e) = \text{Vect}(e')$.

13b. Soit (V, C) un sous-espace vectoriel orienté de dimension p de E . Procédons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $\Psi_0 \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $e \in C$, $\Omega_p(e) = \text{vol}_p(e) \Psi_0$. On sait que V possède une base orthonormée $b = (b_1, \dots, b_p)$. Si $b \in C$, posons $c = b$, sinon, posons $c = (-b_1, b_2, \dots, b_p)$. Dans tous les cas, $c \in C$ et c est une base orthonormée de V (on dit que c est une *base orthonormée directe* de (V, C)). On a donc $\Omega_p(c) = \text{vol}_p(c) \Psi_0$. Or, d'après la question **8a**, $\text{vol}_p(c) = 1$. Donc $\Psi_0 = \Omega_p(c)$. D'où l'unicité de Ψ_0 .

Synthèse. Posons $\Psi(V, C) = \Omega_p(c)$ et montrons que pour tout $e \in C$, $\Omega_p(e) = \text{vol}_p(e) \Psi(V, C)$. Soit donc $e \in C$. D'après la question **7a**, $\Omega_p(e) = \det(P_c^e) \Omega_p(c)$. Or, d'après la question **9a**, $\text{vol}_p(e) = |\det(P_c^e)|$. Mais comme c et e ont même orientation, $\det(P_c^e) > 0$ et $\text{vol}_p(e) = \det(P_c^e)$. Finalement $\Omega_p(e) = \text{vol}_p(e) \Omega_p(c) = \text{vol}_p(e) \Psi(V, C)$. D'où l'existence de $\Psi(V, C)$.

14a. Soit $(V, C) \in \widetilde{\text{Gr}}(p, E)$. On dispose d'une base orthonormée directe c de (V, C) , que l'on complète en une base orthonormée e de E . D'après la question **12**, on peut supposer que le produit scalaire sur $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ est celui donné par

la relation (1) de la partie **III** (en reprenant les notations de cette partie). Montrons que $\Psi(V, C)$, qui est égale à $\Omega_p(c)$ d'après la question **8a**, est de norme 1 :

$$\|\Psi(V, C)\|^2 = \|\Omega_p(c)\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \Omega_p(c)(e_\alpha)^2.$$

Or, puisque e est une famille orthonormée et que $c = e_{(1, \dots, p)}$, les termes de la dernière somme d'indice $\alpha \neq (1, \dots, p)$ sont nuls (l'une des colonnes de la matrice $\text{Gram}(c, e_\alpha)$ est nulle). Donc $\|\Psi(V, C)\|^2 = \Omega_p(c)(c)^2$ puis, d'après la question **8a**, $\|\Psi(V, C)\|^2 = 1$. On conclut que Ψ est à valeurs dans la sphère de rayon 1 de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

Soit (V, C) et (V', C') deux éléments de $\widetilde{\text{Gr}}(p, E)$ tels que $\Psi(V, C) = \Psi(V', C')$. On dispose d'une base orthonormée directe c (resp. c') de (V, C) (resp. (V', C')). Comme $\Psi(V, C) = \Omega_p(c)$ et $\Psi(V', C') = \Omega_p(c')$, on a donc : $\Omega_p(c) = \Omega_p(c')$. D'après la question **13a**, on en déduit que $\text{Vect}(c) = \text{Vect}(c')$, i.e. $V = V'$. Supposons par l'absurde que $C \neq C'$. En écrivant $c' = (c'_1, \dots, c'_p)$, posons $d = (-c'_1, c'_2, \dots, c'_p)$. Alors d est une base orthonormée directe de (V, C) et $\Omega_p(d) = -\Omega_p(c')$. Ainsi

$$\Psi(V, C) = \Omega_p(c) = \Omega_p(c') = -\Omega_p(d) = -\Psi(V, C)$$

donc $\Psi(V, C) = 0$, i.e. $\Omega_p(c) = 0$, ce qui est absurde d'après la question **7b**. Finalement $C = C'$ et $(V, C) = (V', C')$. On conclut que Ψ est injective.

14b. Soit $(V_n, C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels orientés de dimension p de E . Montrons que l'on peut extraire de la suite $(\Psi(V_n, C_n))_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ une sous-suite convergente dont la limite appartient à $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons une base orthonormée directe c_n de (V_n, C_n) . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Psi(V_n, C_n) = \Omega_p(c_n)$. Écrivons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = (c_1^{(n)}, \dots, c_p^{(n)})$. Rappelons que S désigne la sphère de centre 0 et de rayon 1 de E . Puisque E étant de dimension finie, S est compacte et S^p est compact. Comme $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de S^p , on dispose donc de $c = (c_1, \dots, c_p) \in S^p$ et de $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tels que $(c_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers c . Alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $\langle c_i^{(\varphi(n))}, c_j^{(\varphi(n))} \rangle$ tend quand $n \rightarrow +\infty$ vers $\langle c_i, c_j \rangle$, i.e. $(\delta_{i,j})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\langle c_i, c_j \rangle$. Par unicité de la limite, on en déduit que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $\langle c_i, c_j \rangle = \delta_{i,j}$: c est une famille orthonormée de E . Posons $V = \text{Vect}(c)$: V est un sous-espace vectoriel de dimension p de E et c en est une base orthonormée. Notons C l'orientation de V donnée par c (i.e. on décrète que c est une base orthonormée directe de V). Ainsi $(V, C) \in \widetilde{\text{Gr}}(p, E)$. Montrons que $(\Psi(V_{\varphi(n)}, C_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\Psi(V, C)$, ce qui conclura. Il s'agit d'établir que $(\Omega_p(c_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\Omega_p(c)$. Or, d'après la question **10a**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Omega_p(c_{\varphi(n)}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \Omega_p(c_{\varphi(n)})(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \det(\text{Gram}(c_{\varphi(n)}, e_\alpha)) \Omega_p(e_\alpha).$$

Mais puisque $(c_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers c , on a : pour tout $\alpha \in \mathcal{I}_p$, la suite de matrices $(\text{Gram}(c_{\varphi(n)}, e_\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\text{Gram}(c, e_\alpha)$ (les p^2 suites des coefficients de ces matrices convergent vers les p^2 coefficients de la matrice $\text{Gram}(c, e_\alpha)$ par continuité du produit scalaire) donc, par continuité du déterminant d'une matrice, $(\det(\text{Gram}(c_{\varphi(n)}, e_\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\det(\text{Gram}(c, e_\alpha)) = \Omega_p(c)(e_\alpha)$. Ainsi (en utilisant à nouveau la question **10a**) :

$$\Omega_p(c_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \Omega_p(c)(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha) = \Omega_p(c).$$

Finalement $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ est compact.

15. Montrons dans un premier temps que $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(d, E))$ n'est pas connexe par arcs. On dispose d'une base orthonormée $e = (e_1, \dots, e_d)$ de E . Posons $e' = (-e_1, e_2, \dots, e_d)$. Alors puisqu'il y a exactement deux orientations de E et que e et e' n'ont pas même orientation, $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(d, E)) = \{\Omega_d(e), \Omega_d(e')\}$. Or, $\Omega_d(e') = -\Omega_d(e)$. Donc $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(d, E)) = \{\Omega_d(e), -\Omega_d(e)\}$. D'après la question **7b**, $\Omega_d(e) \neq 0$ donc $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(d, E))$ est un ensemble fini de cardinal 2. Or, $\mathcal{A}_d(E, \mathbb{R})$ est une droite vectorielle (par exemple d'après la question **10b** ou tout simplement parce que c'est la droite vectorielle engendrée par \det_e). On en déduit que $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(d, E))$ n'est pas une partie connexe par arcs de $\mathcal{A}_d(E, \mathbb{R})$.

Supposons maintenant que $p \leq d - 1$. Montrons que $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ est une partie connexe par arcs de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$. Soit donc (V, C) et (V', C') deux éléments de $\widetilde{\text{Gr}}(p, E)$. Comme $\dim(V) = \dim(V') = p$, nous pouvons appliquer les résultats de la partie **I** : notons u (resp. u') une famille de vecteurs de V (resp. V') construite à la question **1**. D'après la question **3a**, u (resp. u') est une base orthonormée de V (resp. V'). Quatre cas s'offrent à nous.

- *Cas 1* : $u \in C$ et $u' \in C'$. Alors $\Psi(V, C) = \Omega_p(u)$ et $\Psi(V', C') = \Omega_p(u')$. Reprenons les notations de la question **3d** et fixons $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Notons que $\dim(W_k) \in \{1, 2\}$. Si W_k est une droite vectorielle, alors on dispose de $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel

que $u'_k = \lambda_k u_k$ donc $1 = \|u'_k\| = |\lambda_k| \|u_k\| = |\lambda_k|$. Or, d'après la question **1**, $\langle u_k, u'_k \rangle \geq \langle -u_k, u'_k \rangle = -\langle u_k, u'_k \rangle$ donc $\langle u_k, u'_k \rangle \geq 0$, i.e. $\langle u_k, \lambda_k u_k \rangle \geq 0$, i.e. $\lambda_k \geq 0$. Finalement $\lambda_k = 1$ et $u'_k = u_k$. On pose alors pour tout $t \in [0, 1]$, $h_k(t) = u_k$. Si maintenant W_k est un plan vectoriel, complétons la famille orthonormée (u_k) de W_k en une base orthonormée (u_k, v_k) de W_k . Comme $\|u'_k\| = 1$, on dispose de $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que $u'_k = \cos(\alpha_k)u_k + \sin(\alpha_k)v_k$. On pose alors pour tout $t \in [0, 1]$, $h_k(t) = \cos(\alpha_k t)u_k + \sin(\alpha_k t)v_k$. Notons que $h_k(0) = u_k$, $h_k(1) = u'_k$ et que h_k est continue et est à valeurs dans la sphère de centre 0 et de rayon 1 de W_k . Posons maintenant pour tout $t \in [0, 1]$, $V(t) = \text{Vect}(h_1(t), \dots, h_p(t))$. D'après notre construction et la question **3d**, pour tout $t \in [0, 1]$, $h(t) = (h_1(t), \dots, h_p(t))$ est une base orthonormée de $V(t)$; on oriente $V(t)$ de sorte que $h(t)$ soit une base orthonormée directe de $V(t)$ et on note $C(t)$ l'orientation obtenue. Alors $\Psi(V(t), C(t)) = \Omega_p(h(t))$. Comme $h(0) = u$ et $h(1) = u'$, $\Psi(V, C) = \Omega_p(h(0))$ et $\Psi(V', C') = \Omega_p(h(1))$. Enfin, par construction, $t \in [0, 1] \mapsto h(t) \in E^p$ est continue. D'autre part, d'après la question **10a**, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\Omega_p(h(t)) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \Omega_p(h(t))(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \det(\text{Gram}((h(t), e_\alpha))) \Omega_p(e_\alpha).$$

On en déduit que la fonction $t \in [0, 1] \mapsto \Omega_p(h(t)) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ est continue. Finalement, on a bien réussi à relier continûment $\Psi(V, C)$ à $\Psi(V', C')$ en temps fini en restant dans $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$.

- *Cas 2* : $u \notin C$ et $u' \notin C'$. Alors remplacer le premier vecteur u_1 de u en $-u_1$ et le premier vecteur u'_1 de u' en $-u'_1$ ne change pas la construction de la partie **I** et nous ramène au cas 1.
- *Cas 3* : $u \notin C$ et $u' \in C'$. Alors, en notant C_2 la seconde orientation de V , $u \in C_2$. Comme $p < d$, $V^\perp \neq \{0\}$: on dispose d'un vecteur v de norme 1 appartenant à V^\perp . En posant pour tout $t \in [0, \pi]$,

$$a(t) = (-\cos(t)u_1 + \sin(t)v, u_2, \dots, u_p),$$

on arrive à relier continûment $\Psi(V, C)$ à $\Psi(V, C_2)$ en temps fini en restant dans $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$. Comme $u \in C_2$ et $u' \in C'$, le cas 1 assure que l'on peut relier continûment $\Psi(V, C_2)$ à $\Psi(V', C')$ en temps fini en restant dans $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$. Finalement, par transitivité, on peut relier continûment $\Psi(V, C)$ à $\Psi(V', C')$ en temps fini en restant dans $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$.

- *Cas 4* : $u \in C$ et $u' \notin C'$. Ce cas est analogue au cas 3.

Finalement, on peut conclure que $\boxed{\text{si } p \leq d - 1, \Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E)) \text{ est une partie connexe par arcs de } \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})}$.