# 1 re partie

**1°)** Avec $G(x,y)=\arctan(\dfrac{x}{y})$, $\dfrac{\partial G}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}=y\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ ;

$\dfrac{\partial G}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\dfrac{x.2y}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ ;

Finalement $\Delta G=0$ sur $\mathcal{P}$.

**2°)** Avec $F(x,y)=\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{1}{y^2}\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)$ ;

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{-x}{y^2}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\dfrac{2x}{y^2}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{x^2}{y^4}\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)$ ; Alors

$\Delta F=\dfrac{x^2+y^2}{y^4}\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{2xy}{y^4}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$ donc $\Delta F=0$ si et seulement si $(x^2+y^2)\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)+2xy\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)=0$ c'est-à-dire $\left(\dfrac{x^2}{y^2}+1\right)\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{2x}{y}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)=0$, et, en posant $u:=\dfrac{x}{y}$ et $\Phi:=\varphi'$, $(1+u^2)\Phi'(u)+2u\Phi'(u)=0$, équation linéaire du premier ordre sans second membre dont les solutions sont $\Phi(u)=\dfrac{\lambda}{1+u^2}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, soit $\varphi(u)=\lambda.\arctan(u)+\mu$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$; $\boxed{\Delta F=0 \iff F(x,y)=C_1\arctan\dfrac{x}{y}+C_2,\ (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2}$.

**3°)** $t\mapsto\arctan t+\arctan\dfrac{1}{t}$ et $t\mapsto$ sgn $(t)$ étant impaires, il suffit de prouver la formule pour $t>0$;

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\arctan t+\arctan\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{1}{t^2}\dfrac{1}{1+\frac{1}{t^2}}=\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{1}{1+t^2}=0$ donc $\arctan t+\arctan\dfrac{1}{t}$ est constante sur *l'intervalle* $\mathbb{R}_+^*$, et sa valeur est celle de $\arctan 1+\arctan\dfrac{1}{1}=\dfrac{\pi}{2}$.

**4°)** Pour $(x,y)\in\mathcal{P}$ , alors $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ et :

- Si $x>0$ : $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, et $\arctan(\dfrac{y}{x})\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\theta=\arctan(\dfrac{y}{x})=$ Arg $(x+iy)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan(\dfrac{x}{y})$.
- Si $x<0$ : $\theta\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, et $\arctan(\dfrac{y}{x})\in\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$ donc $-\pi+\theta=\arctan(\dfrac{y}{x})$ et d'autre part $\arctan(\dfrac{x}{y})+\arctan(\dfrac{y}{x})=-\dfrac{\pi}{2}$ donc $\arctan(\dfrac{y}{x})=-\dfrac{\pi}{2}-G(x,y)$; $-\pi+\theta=-\dfrac{\pi}{2}-G(x,y)$ et $G(x,y)=\dfrac{\pi}{2}-$Arg $(x+iy)$.

Finalement $\boxed{G(x,y)=\dfrac{\pi}{2}-\text{Arg }(x+iy)\text{ pour tout }(x,y)\in\mathcal{P}.}$

**5°)** $g(x)=\lim\limits_{\substack{y\to0\\y>0}}G(x,y)=\left\{\begin{array}{ccc}\dfrac{\pi}{2} & \text{si} & x>0\\ 0 & \text{si} & x=0\\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} & x<0\end{array}\right\}=\text{sgn}\,(x).\dfrac{\pi}{2}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{yg(t)}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $-\infty$ et $+\infty$ seulement, car $(x-t)^2+y^2\geqslant y^2>0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

En $+\infty$ (et en $-\infty$) $\left|\dfrac{yg(t)}{(x-t)^2+y^2}\right|=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{y}{(x-t)^2+y^2}\sim\dfrac{\pi}{2}\dfrac{y}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{y}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et vaut :

$$-\int_{-\infty}^{0}-\frac{\pi}{2}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{\pi}{2}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.\left(\int_{-\infty}^{0}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t\right).$$

Or, si $(a,b)\in\bar{\mathbb{R}}^2$, $\displaystyle\int_a^b \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t = \int_{x-a}^{x-b} -\frac{y}{u^2+y^2}\,\mathrm{d}t = \left[\arctan\frac{u}{y}\right]_{x-a}^{x-b}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t = G(x,y)-\frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t = G(x,y)+\frac{\pi}{2}$ et $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yg(t)}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t = \pi.G(x,y)}$

# 2 $^{\text{e}}$ partie

**1°)** Soit $\mathcal{C}_\alpha$ la conique d'équation : $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\alpha-1}=1$

- Si $\alpha<0$, alors $\alpha-1<0$ et la conique $\mathcal{C}_\alpha$ est vide.
- Si $0\alpha<1$, alors $\alpha>0$ et $\alpha-1<0$, donc $\mathcal{C}_\alpha$ est une hyperbole d'axe focal $O_x$ ; $a=\sqrt{\alpha}$ et $b=\sqrt{1-\alpha}$ donc $c^2=a^2+b^2=1$. Les foyers de $\mathcal{C}_\alpha$ sont en $(-1,0)$ et en $(1,0)$.
- Si $\alpha>1$, $\alpha>\alpha-1>0$ donc $\mathcal{C}_\alpha$ est une ellipse d'axe focal $O_x$ ; $a=\sqrt{\alpha}$ et $b=\sqrt{\alpha-1}$ donc $c^2=a^2-b^2=1$. Les foyers de $\mathcal{C}_\alpha$ sont en $(-1,0)$ et en $(1,0)$.

**2°)** $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\psi(\alpha)=-1=\lim_{\alpha\to-\infty}\psi(\alpha)$ ; En 0, $\psi(\alpha)\sim\dfrac{x_0^2}{\alpha}$ et en 1 $\psi(\alpha)\sim\dfrac{y_0^2}{\alpha-1}$. De plus, $\psi'(\alpha)=-\dfrac{x_0^2}{\alpha^2}-\dfrac{y_0^2}{(\alpha-1)^2}<0$, donc $\psi$ est décroissante sur tout intervalle de son ensemble de définition, d'où le tableau :

| $\alpha$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\psi(\alpha)$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty\Vert+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty\Vert+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ |

$\psi(\alpha)$ a donc deux racines :
$\alpha_1\in]0,1[$ et $\alpha_2\in]1,+\infty[$.

Pour $(x_0,y_0)$ fixés, il existe donc une hyperbole $_{\alpha_1}$ et une ellipse $_{\alpha_2}$ passant par $M_0$. $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont les deux racines de l'équation $\dfrac{x_0^2}{\alpha}+\dfrac{y_0^2}{\alpha-1}=1$, c'est-à-dire $(\alpha-1)x_0^2+\alpha y_0^2=\alpha(\alpha-1)$ soit $\alpha^2-(1+x_0^2+y_0^2)\alpha+x_0^2$; Donc, d'après les raltions entre racines et coefficients d'un trinôme, $\boxed{\alpha_1+\alpha_2=1+x_0^2+y_0^2 \text{ et } \alpha_1.\alpha_2=x_0^2}$.

Si $x_0=0$, $\psi:\alpha\mapsto\dfrac{y_0^2}{\alpha-1}-1$ est une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, donc $\psi(\alpha)=0$ a une seule racine et il n'y a qu'une conique passant par $M_0$.

**3°)** La tangente en $M_0(x_0,y_0)$ à la conique $\mathcal{C}_\alpha$ a pour équation : $\dfrac{x.x_0}{\alpha}+\dfrac{y.y_0}{\alpha-1}=1$, donc le vecteur normal est $\overrightarrow{n}(\alpha)=\dfrac{x_0}{\alpha}\vec{\imath}+\dfrac{y_0}{\alpha-1}\vec{\jmath}$ ; $\overrightarrow{n}(\alpha_1)\cdot\overrightarrow{n}(\alpha_2)=\dfrac{x_0^2}{\alpha_1\alpha_2}+\dfrac{y_0^2}{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)}=\dfrac{x_0^2(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)+y_0^2\alpha_1.\alpha_2}{\alpha_1.\alpha_2(\alpha_1)(\alpha_2)}$. Or
$x_0^2(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)+y_0^2\alpha_1.\alpha_2=(x_0^2+y_0^2)\alpha_1.\alpha_2+(1-\alpha_1-\alpha_2)x_0^2=(x_0^2+y_0^2)x_0^2-(x_0^2+y_0^2)x_0^2=0$
Les droites passant par $M_0$ et tangentes respectivement à chacun des deux coniques de la famille $\mathcal{F}$ passant par $M_0$ sont orthogonales.

**4°)** $\dfrac{\partial x}{\partial u}=\operatorname{sh}u\cos v$ ; $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\operatorname{ch}u\cos v$ ; $\dfrac{\partial x}{\partial v}=-\operatorname{ch}u\sin v$ ; $\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}=-\operatorname{ch}u\cos v$ ; donc $\Delta x=\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}=0$.
$\dfrac{\partial y}{\partial u}=\operatorname{ch}u\sin v$ ; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}=\operatorname{sh}u\sin v$ ; $\dfrac{\partial y}{\partial v}=\operatorname{sh}u\cos v$ ; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2}=-\operatorname{sh}u\sin v$ ; donc $\Delta y=\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2}=0$.
$J(H)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{sh}u\cos v & -\operatorname{ch}u\sin v\\ \operatorname{ch}u\sin v & \operatorname{sh}u\cos v\end{pmatrix}$; $\boxed{\det(J(H))=\operatorname{sh}^2u\cos^2v+\operatorname{ch}^2u\sin^2v=\operatorname{ch}^2u-\cos^2v\geqslant 0}$
Ce jacobien s'annule si et seulement si $\operatorname{ch}u=\pm\cos v$, ce qui n'est possible que si $\operatorname{ch}u=1=\cos v$, c'est-à-dire si $u=0$ et $v=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

**5°)** L'image par $H$ de la droite d'équation $u=u_0$ est une courbe paramétrée par $v$ : $(X_1(v)=\operatorname{ch}u_0\cos v, Y_1(v)=\operatorname{sh}u_0\sin v)$ , et d'équation cartésienne : $\dfrac{X_1^2}{\operatorname{ch}^2u_0}+\dfrac{Y_1^2}{\operatorname{sh}^2u_0}=1$ si $u_0\neq 0$ (c'est la droite $y=0$ si $u_0=0$). On reconnaît la conique $\mathcal{C}_\alpha$ avec $\alpha=\operatorname{ch}^2u_0$.
L'image par $H$ de la droite d'équation $v=v_0$ est une courbe paramétrée par $u$ : $(X_2(u)=\operatorname{ch}u\cos v_0, Y_2(v)=\operatorname{sh}u\sin v_0)$ ], et d'équation cartésienne : $\dfrac{X_2^2}{\cos^2v_0}+\dfrac{Y_2^2}{\sin^2v_0}=1$ si $v_0\notin\dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ (c'est la droite $x=0$ si $v_0\in\dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$) On reconnaît la conique $\mathcal{C}_\alpha$ avec $\alpha=\cos^2v_0$.

Réciproquement,

si $0 < \alpha < 1, \exists ! v_0 \in ]0, \pi[, \alpha = \cos^2 v_0$ et $\exists u \in \mathbb{R}_+^* \begin{cases} x(u, v_0) & = \operatorname{ch} u \cos v_0 \\ y(u, v_0) & = \operatorname{sh} u \sin v_0 \end{cases} \iff \dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{y^2}{1-\alpha} = 1.$

si $\alpha < 1, \exists ! u_0 \in \mathbb{R}_+^*, \alpha = \operatorname{ch} u_0$ et $\exists v \in ]0, \pi[ \begin{cases} x(u, v_0) & = \operatorname{ch} u_0 \cos v \\ y(u, v_0) & = \operatorname{sh} u_0 \sin v \end{cases} \iff \dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{y^2}{1-\alpha} = 1.$

Dans les deux cas, l'image par $H$ de la droite concernée est $\mathcal{C}_\alpha$, c'est -à-dire que $H$ détermine une bijection de $]0, +\infty[\times]0, \pi[$ sur $\mathcal{P}$.

**6°)** En appliquant les formules : $\dfrac{\partial \diamond}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial \diamond}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial \diamond}{\partial y} = \operatorname{sh} u \cos v \dfrac{\partial \diamond}{\partial x} + \operatorname{ch} u \sin v \dfrac{\partial \diamond}{\partial y}$

et $\dfrac{\partial \diamond}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial \diamond}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial \diamond}{\partial y} = -\operatorname{ch} u \sin v \dfrac{\partial \diamond}{\partial x} + \operatorname{sh} u \cos v \dfrac{\partial \diamond}{\partial x}$, on trouve :

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\operatorname{sh} u \cos v \dfrac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{ch} u \sin v \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) =$

$\operatorname{ch} u \cos v \dfrac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sh} u \sin v \dfrac{\partial f}{\partial y} + \operatorname{sh} u \cos v \left(\operatorname{sh} u \cos v \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \operatorname{ch} u \sin v \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) + \operatorname{ch} u \sin v \left(\operatorname{sh} u \cos v \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \operatorname{ch} u \sin v \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial}{\partial v}\left(-\operatorname{ch} u \sin v \dfrac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sh} u \cos v \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = -\operatorname{ch} u \cos v \dfrac{\partial f}{\partial x} - \operatorname{sh} u \sin v \dfrac{\partial f}{\partial y}$

$-\operatorname{ch} u \sin v \left(-\operatorname{ch} u \sin v \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \operatorname{sh} u \cos v \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) + \operatorname{sh} u \cos v \left(-\operatorname{ch} u \sin v \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \operatorname{sh} u \cos v \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$

Finalement $\Delta(f \circ H) = \left(\operatorname{ch}^2 u \sin^2 v + \operatorname{sh}^2 u \cos^2 v\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \det(J)(H)\Delta f$

D'après la bijectivité de $H$ constatée plus haut : $\Delta(f \circ H) = 0$ sur $]0, +\infty[\times]0, \pi[ \iff \Delta(f) = 0$ sur $\mathcal{P}$.

## 3 e partie

**1°)** On applique la formule de changement de variables à $\omega : (\rho, \theta) \mapsto (a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta)$ .

La matrice jacobienne de $\omega$ est celle du changement en polaires $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$, donc $\iint_{\mathcal{D}_r} f(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$ $\iint_{\substack{0 \leqslant \rho \leqslant r \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\rho\,\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^r m(a, b, \rho)\rho\,\mathrm{d}\rho.$

D'autre part, on applique la formule de Green-Riemann à $P = -\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $Q = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ (alors $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$ $\Delta f$ ) , $\mathcal{D} = \mathcal{D}_r$ et $\Gamma^+ = \{(x, y)\rho = r \text{ et } \theta \in [0, 2\pi]\}$ :

$\iint_{\mathcal{D}_r} \Delta f(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\Gamma_r^+} -\dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_r^+} (\cos \theta\,\mathrm{d}\rho - \rho \sin \theta\,\mathrm{d}\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y} + (\sin \theta\,\mathrm{d}\theta + \rho \cos \theta\,\mathrm{d}\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y =$ $\int_{\Gamma_r^+} \left(\rho \cos \theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + \rho \sin \theta \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\theta + \int_{\Gamma_+^r} \left(-\cos \theta \dfrac{\partial f}{\partial y} + \sin \theta \dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}\rho = \rho \int_{\Gamma_+^r} \left(\cos \theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\theta.$

**2°)** $\varphi : (r, \theta) \mapsto f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta)$ est continue sur $[0, b[\times[0, 2\pi[$ ; Donc $r \mapsto \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[0, b[$;

**3°)** Posons $\Phi(r, \theta) := \cos \theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \dfrac{\partial f}{\partial y}$ ; alors $r \mapsto \int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta)\,\mathrm{d}\theta$ est $\mathcal{C}^\infty$ comme intégrale ordinaire d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi[$ ;

$M(a, b, r) = \dfrac{1}{r\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta)\,\mathrm{d}\theta$ est continue sur $[0, b[$ comme rapport de $\int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta)\,\mathrm{d}\theta$ et de $\pi.r > 0$;

D'après la formule de Taylor-Young : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) + r \cos \theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r \sin \theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + o(r)$

et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) + r \cos \theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r \sin \theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + o(r)$ ; Après combinaison linéaire de ces égalités de coefficients respectifs $\cos \theta$ et $\sin \theta$ :

$\Phi(r,\theta) = \Phi(0,\theta) + r\cos^2\theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\sin^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2r\cos\theta\sin\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + o(r)$ donc

$$\frac{1}{r\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{r\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}\theta + o(1).$$

Le premier terme de cette somme n'a pas de limite quand $r \to 0$ en tout point où $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, et dans ce cas $f$ n'est pas continue en $r = 0$.

**4°)** Soit $\Gamma$ la fonction définie par $\Gamma(r) = f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)$ ;
$\dfrac{\partial\Gamma}{\partial r} = \left(\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)$, donc en intégrant pour $\theta\in[0,2\theta]$ :
$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{r}\iint_{\mathcal{D}_r}\Delta f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ ;
Or $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\frac{\partial m}{\partial r}$ donc $\displaystyle\frac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = \frac{1}{2\pi r}\iint_{\mathcal{D}_r}\Delta f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

**5°)** $\displaystyle M(a,b,r) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\mathcal{D}_r} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{2}{r^2}\int_0^r\rho m\,\mathrm{d}\rho$ d'après 3 e 1°. Par dérivation par rapport à $r\in]0,b[$ :
$\displaystyle\frac{\partial M}{\partial r} = -\frac{4}{r^3}\int_0^r\rho m\,\mathrm{d}\rho + \frac{2}{r^{\cancel{2}}}\cancel{r}m = \frac{2}{r}m - \frac{2}{r}.\frac{2}{r^2}\int_0^r\rho m\,\mathrm{d}\rho = \frac{2}{r}m - \frac{2}{r}M$

## 4 e partie

**1°)** Si $f$ est harmonique sur $\mathcal{P}$ alors $\Delta f = 0$, donc $\displaystyle\frac{\partial m}{\partial r} = \frac{1}{2\pi r}\iint_{\mathcal{D}_r}\Delta f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$ pour $0 < r < b$, alors $m$ est constante sur $]0,r[$ (et donc sur $[0,r[$, par continuité de $m$ en $0_+$) et vaut $\displaystyle m(a,b,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a,b)\,\mathrm{d}\theta = f(a,b)$.
$f$ vérifie la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$.

**2°)** Supposons que $\forall(a,b)\in\mathcal{P}, \forall r\in]0,b[, m(a,b,r) = cte = K$, avec $K = f(a,b)$.
Alors, d'après 3 e 5°, $\dfrac{\partial M}{\partial r} = \dfrac{2}{r}(K-M)$ ; donc, pour $(a,b)$ fixés, $M$ est solution de l'équation différentielle $y' + \dfrac{2}{r}y = K$, dont les solutions sont $y(r) = \dfrac{\lambda}{r^2}+K$ ($\lambda\in\mathbb{R}$). Or $M(a,b,r) \ll \dfrac{1}{r^2}$, car $M(a,b,r) = O(\dfrac{1}{r})$ d'après 3 e 1°. Il en résulte que $\lambda = 0$ et que $M(a,b,r) = K = f(a,b)$.

**3°)** La réciproque est plus simple (¿ tiens... bizarre ?) : Si $M(a,b,r) = cte = K$, alors $\forall r\in[0,b[, m(a,b,r) - M(a,b,r) = \dfrac{r}{2}\dfrac{\partial M}{\partial r} = 0$, donc $m(a,b,r) = M(a,b,r) = f(a,b)$ pour $(a,b)$ fixés quelconques.

**4°)** L'application $\psi : (a,b)\mapsto f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et a pour dérivée $\psi'(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)$, donc $\displaystyle\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial x}(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$, soit, si $f(a,b) = m(a,b,r)$, $\displaystyle\frac{\partial}{\partial a}(f(a,b)) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial x}(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (et, par un raisonnement analogue, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$) a la propriété de moyenne circulaire, donc spatiale, et il en va de même par itération des dérivées secondes, et donc de $\Delta f$ par addition.

**5°)** D'après 3 e 4°, si $\dfrac{\partial m}{\partial r} = 0$ sur $\mathcal{P}$, alors $\displaystyle\frac{1}{2\pi r}\iint_{\mathcal{D}_r}\Delta f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$ donc $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}_r}\Delta f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$ ;
Soit $\mu$ la fonction définie par $\displaystyle\mu(a,b,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$, alors $\Delta f(a,b,r) = \mu(a,b,r)$ d'après 4 e 4°; De plus $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}_r}\Delta f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 2\pi\int_0^r\rho\mu(a,b,\rho)\,\mathrm{d}\rho = 0$ $cf$ 3 e 1° , donc $\forall r\in]0,b[$, $\displaystyle\int_0^r\rho\mu(a,b,r)\,\mathrm{d}\rho = 0$ et par dérivation $\forall r\in]0,b[, \mu(a,b,r) = 0 = \Delta f(a,b)$ pour tous $(a,b)$.

Christian Rieffel, Lycée Louis Armand — Poitiers ch.rieffel@free.fr