Centrale-Supélec 2017 - Filière PC
Corrigé de l'épreuve Mathématiques 2

Damien Broizat & Nicolas Basbois
Lycée Jules Ferry - Institut Stanislas, Cannes

I Vitesse de convergence d'une suite réelle

I.A - Des résultats généraux

I.A.1) Par exemple, la suite $(u_n) = (\frac{1}{2^n})$ appartient à E^c, puisqu'elle converge vers $\ell = 0$, ne vaut jamais 0, et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| = \frac{1}{2},$$

donc la suite (u_n^c) est convergente. Ceci montre que l'ensemble E^c est non vide.

I.A.2) Non, E^c n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car il ne contient pas la suite nulle (elle converge mais vaut constamment sa limite, donc elle n'est même pas dans E).

I.A.3) Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_{2k} = u_{2k+1} = \frac{1}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est dans E (puisqu'elle converge vers $\ell = 0$ et ne vaut jamais 0), mais pas dans E^c. En effet, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^c = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2k \\ \frac{1}{k+1} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases},$$

donc $\lim\limits_{k \to +\infty} u_{2k}^c = 1 \neq \lim\limits_{k \to +\infty} u_{2k+1}^c = 0$, ce qui montre que la suite (u_n^c) diverge.
L'ensemble E^c est donc strictement inclus dans E.

I.A.4) Si $(u_n) \in E^c$, alors on a déjà $\ell^c \geq 0$ (en tant que limite d'une suite à termes positifs). Par définition de la limite de la suite (u_n^c) : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow \ell^c - \varepsilon \leq u_n^c \leq \ell^c + \varepsilon$.
Supposons que $\ell^c > 1$. On peut alors choisir $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\ell^c - \varepsilon_0 > 1$ (par exemple $\varepsilon_0 = (\ell^c - 1)/2$), et on aura donc $u_n^c \geq \ell^c - \varepsilon_0 > 1$ à partir d'un certain rang n_0, ce qui se réécrit :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |u_{n+1} - \ell| \geq (\ell^c - \varepsilon_0)|u_n - \ell|.$$

Une récurrence immédiate entraîne alors

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \geq (\ell^c - \varepsilon_0)^{n-n_0}|u_{n_0} - \ell|,$$

et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = +\infty$ (puisque $\ell^c - \varepsilon_0 > 1$), ce qui est contradictoire avec le fait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. On a donc nécessairement $\ell^c \in [0; 1]$.

I.B - Exemples de calcul de vitesse de convergence

I.B.1)
- La suite $(u_n) = \left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)$ converge vers $\ell = 0$ et ne vaut jamais 0, donc $(u_n) \in E$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^c = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc $(u_n) \in E^c$ et $\ell^c = 1$ (convergence lente).

- La suite $(v_n) = (n^k q^n)$ converge vers 0 (par croissances comparées) et ne vaut jamais 0 pour $n \geq 1$, donc $(v_n) \in E$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n^c = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k q \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} q,$$

donc $(v_n) \in E^c$ et $\ell^c = q \in]0; 1[$ (convergence géométrique de rapport q).

- La suite $(w_n) = (\frac{1}{n!})$ converge vers 0 et ne vaut jamais 0, donc $(w_n) \in E$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n^c = \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $(w_n) \in E^c$ et $\ell^c = 0$ (convergence rapide).

I.B.2) a) On a $v_n = e^{2^n \ln\left(1+2^{-n}\right)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$, le développement limité $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2)$ donne le développement asymptotique suivant :

$$v_n = e^{2^n\left(2^{-n}-\frac{1}{2}(2^{-n})^2+\underset{n\to+\infty}{o}((2^{-n})^2)\right)} = e^{1-\frac{1}{2}2^{-n}+\underset{n\to+\infty}{o}(2^{-n})} = e\times e^{-2^{-n-1}+\underset{n\to+\infty}{o}(2^{-n})}.$$

Enfin, on utilise le développement limité $e^y = 1 + y + \underset{y\to0}{o}(y)$ avec $y = -2^{-n-1} + \underset{n\to+\infty}{o}(2^{-n})$ (qui tend bien vers 0 lorsque $n \to +\infty$) :

$$v_n = e \times \left(1 - 2^{-n-1} + \underset{n\to+\infty}{o}(2^{-n})\right) = e - \frac{e}{2^{n+1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

b) La suite (v_n) converge vers $\ell = e$ et ne vaut pas e à partir d'un certain rang, puisque $v_n - e \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e}{2^{n+1}} < 0$, donc $v_n < e$ à partir d'un certain rang. Ceci montre que $(v_n) \in E$. De plus,

$$v_n^c = \frac{|v_{n+1} - e|}{|v_n - e|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e/2^{n+2}}{e/2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

donc (v_n^c) converge vers $\ell^c = \frac{1}{2}$, ce qui montre que (v_n) appartient à E^c, et sa vitesse de convergence est géométrique de rapport $1/2$.

I.B.3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x}$. Chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ et on a $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x}{n}e^{-x} \leq xe^{-x}$ pour tout $(x, n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}^*$.
Puisque $x \mapsto xe^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (elle est continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$, elle-même intégrable), on en déduit par le théorème de convergence dominée que $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} 0dx = 0$.
De plus, $I_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car si on avait $I_n = 0$, la continuité et la positivité de f_n sur $[0; +\infty[$ impliqueraient que f_n est identiquement nulle sur $[0; +\infty[$, ce qui n'est pas le cas. Ceci montre bien que $(I_n) \in E$.

b) Soit $X > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une intégration par parties donne :

$$\int_0^X \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x}dx = \left[-\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x}\right]_0^X + \frac{1}{n}\int_0^X \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}e^{-x}dx.$$

Puisque $\int_0^X \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x}dx \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} I_n$ et $\left[-\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x}\right]_0^X \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que l'intégrale $\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{x}{n}}e^{-x}dx$ converge et que

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}e^{-x}dx.$$

On obtient alors par application du théorème de convergence dominée (encore) que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$. En effet, $nI_n = \int_0^{+\infty} g_n(x)dx$, avec $g_n(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{n}}e^{-x}$, chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, la suite (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $x \mapsto e^{-x}$, et $|g_n(x)| \leq e^{-x}$ pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^+$, avec la fonction $x \mapsto e^{-x}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

Finalement, on a l'équivalent $I_n \sim \frac{1}{n}$, qui montre que la suite (I_n) appartient à E^c, et possède une vitesse de convergence lente (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$).

I.B.4) a) Cela résulte d'une comparaison série-intégrale : puisque $t \mapsto t^{-\alpha}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$, on a

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

En sommant pour k variant de $n+1$ à N, on obtient, pour tous entiers $N > n \geq 1$:

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{N^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

En faisant tendre $N \to +\infty$ dans cette inégalité, on obtient bien (puisque $1-\alpha < 0$) l'inégalité voulue :

$$\frac{-(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{-n^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

b) La suite (S_n) est strictement croissante et converge vers ℓ, donc $S_n < \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $(S_n) \in E$. De plus, $S_n^c = \frac{\ell - S_{n+1}}{\ell - S_n}$, donc en utilisant les inégalités précédentes :

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+2)^{\alpha-1}} \leq S_n^c \leq 1.$$

Cet encadrement montre que $S_n^c \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où (S_n) appartient à E^c et possède une vitesse de convergence lente.

I.C - Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle

I.C.1) Puisque $(u_n) \in E$ et la vitesse de convergence de (u_n) est d'ordre $r > 1$, il existe une constante $M > 0$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \neq \ell$ et $\dfrac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} \leq M$.

On a donc, en multipliant cette inégalité par $|u_n - \ell|^{r-1}$:

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| \leq M |u_n - \ell|^{r-1}.$$

Puisque $r-1 > 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell|^{r-1} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| = 0$ par l'inégalité précédente, ce qui montre que la convergence de (u_n) est rapide.

I.C.2) a) On sait que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge vers e^x pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc en évaluant en $x = 1$, on obtient que la suite (S_n) converge vers $s = e$. De plus, la suite (S_n) est strictement croissante, donc on a $S_n \neq e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $(S_n) \in E$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $s - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Puisque c'est une somme de termes positifs, elle est supérieure à son premier terme, ce qui donne l'inégalité $s - S_n \geq \frac{1}{(n+1)!}$. De plus, en factorisant par $\frac{1}{(n+1)!}$, on a

$$s - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+k)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod\limits_{j=2}^{k+1} (n+j)}.$$

Or, $\prod_{j=2}^{k+1}(n+j) \geq \prod_{j=2}^{k+1} 2 = 2^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc

$$s - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{2}{(n+1)!},$$

ce qui montre l'encadrement voulu.

c) Grâce à l'encadrement précédent, on obtient

$$\left|\frac{S_{n+1}-s}{S_n-s}\right| \leq \frac{2}{n+2},$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{S_{n+1}-s}{S_n-s}\right| = 0$, ce qui montre que la convergence de la suite (S_n) est rapide.

d) Supposons que la convergence de (S_n) soit d'ordre $r > 1$. Il existe alors une constante $M > 0$ et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $|S_{n+1} - s| \leq M|S_n - s|^r$ pour tout $n \geq n_0$.
Les encadrements précédemment établis impliquent :

$$\frac{1}{(n+2)!} \leq |S_{n+1} - s| \leq M|S_n - s|^r \leq M\frac{2^r}{((n+1)!)^r},$$

soit

$$\forall n \geq n_0, \qquad ((n+1)!)^{r-1} \leq M2^r(n+2).$$

Mais ceci est impossible car $n+2$ est négligeable devant $((n+1)!)^{r-1}$ (vu que $r-1 > 0$).
Donc la convergence de (S_n) n'est pas d'ordre r.

I.C.3) a) Puisque f est dérivable en ℓ, elle est continue en ℓ. On a donc $(f(u_n))$ qui converge vers $f(l)$ (puisque (u_n) converge vers ℓ). En faisant tendre $n \to +\infty$ dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ (vraie pour tout n), on obtient donc (par unicité de la limite) $\ell = f(\ell)$.

b) Supposons (u_n) non stationnaire.
Tout d'abord, la suite (u_n) est dans E. En effet, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \ell$, alors, puisque $f(\ell) = \ell$, une récurrence immédiate montre que la suite stationne à ℓ à partir du rang n_0, et ceci est contraire à l'hypothèse. On a donc $u_n \neq \ell$ pour tout ℓ, donc $(u_n) \in E$.
En outre, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| = \left|\frac{f(u_n)-f(\ell)}{u_n-\ell}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |f'(\ell)|,$$

(par définition de la dérivabilité de f en ℓ et continuité de la valeur absolue).
Ceci montre que $(u_n) \in E^c$ et que sa vitesse de convergence est $|f'(\ell)|$.

c) Supposons que $|f'(\ell)| > 1$.
Si (u_n) n'est pas stationnaire, la suite (u_n) est dans E^c (d'après la question précédente) et $\ell^c = |f'(\ell)| > 1$. Mais d'après la question **I.A.4**), c'est impossible (ℓ^c doit appartenir à $[0;1]$). Donc la suite (u_n) est nécessairement stationnaire.

d) Puisqu'on suppose ici que (u_n) n'est pas stationnaire, on a nécessairement $(u_n) \in E$ (d'après la question **I.C.3**)b)), donc le quotient $\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r} = \frac{|f(u_n)-f(\ell)|}{|u_n-\ell|^r}$ est bien défini.
Montrons alors l'équivalence voulue :

- Si $f^{(k)}(\ell) = 0$ pour tout $k \in \{1,\cdots,r-1\}$, alors la formule de Taylor-Young donne :

$$\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r} = \frac{|f(u_n)-f(\ell)|}{|u_n-\ell|^r} = \frac{\left|\frac{f^{(r)}(\ell)}{r!}|u_n-\ell|^r + \underset{n\to+\infty}{o}\left(|u_n-\ell|^r\right)\right|}{|u_n-\ell|^r} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left|\frac{f^{(r)}(\ell)}{r!}\right|.$$

  Etant convergente, la suite $\left(\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r}\right)$ est bornée, donc la vitesse de convergence de (u_n) est d'ordre r.

- Sinon, l'ensemble $\{k \in \{1, \cdots, r-1\},\ f^{(k)}(\ell) \neq 0\}$ est non vide. En notant j son minimum, la formule de Taylor-Young donne :

$$\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r} = \frac{|f(u_n)-f(\ell)|}{|u_n-\ell|^r} = \frac{\left|\frac{f^{(j)}(\ell)}{j!}|u_n-\ell|^j + \underset{n\to+\infty}{o}\left(|u_n-\ell|^j\right)\right|}{|u_n-\ell|^r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{|u_n-\ell|^{r-j}}$$

avec $C > 0$ et $r - j > 0$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r} = +\infty$, et donc la convergence de (u_n) n'est pas d'ordre r.

II Autour de la loi faible des grands nombres

II.A - Préliminaires

II.A.1) a) Puisque $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit aisément que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cosh(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \qquad e^{t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

(le rayon de convergence de ces deux séries entières est donc $+\infty$).

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $(2n)! \geq 2^n n!$, car

$$(2n)! = \left(\prod_{k=n+1}^{2n} k\right) \times n!,$$

et le produit $\left(\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} k\right)$ est supérieur à 2^n, puisque si $n \geq 1$, chacun de ses n facteurs est supérieur à 2, et si $n = 0$, il vaut $1 = 2^0$. On en déduit, puisque $t^{2n} \geq 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cosh(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = e^{t^2/2}.$$

II.A.2) Fixons $\lambda \in [0; 1]$. En divisant par $e^a > 0$, on a l'équivalence :

$$e^{\lambda a+(1-\lambda)b} \leq \lambda e^a + (1-\lambda)e^b \iff e^{(1-\lambda)(b-a)} \leq \lambda + (1-\lambda)e^{b-a},$$

pour tous réels $a < b$. En posant $x = b - a$ (qui est strictement positif), il suffit donc de montrer que

$$\forall x > 0, \qquad e^{(1-\lambda)x} \leq \lambda + (1-\lambda)e^x.$$

Pour cela, on étudie la fonction $\varphi_\lambda : x \mapsto \lambda + (1-\lambda)e^x - e^{(1-\lambda)x}$. Elle est dérivable sur $[0; +\infty[$, et

$$\forall x \geq 0, \qquad \varphi_\lambda'(x) = (1-\lambda)(e^x - e^{(1-\lambda)x}) \geq 0$$

(puisque $0 \leq 1-\lambda \leq 1$). Cette fonction est donc croissante sur $[0; +\infty[$, ce qui donne $\varphi_\lambda(x) \geq \varphi_\lambda(0) = 0$, montrant ainsi l'inégalité voulue.

II.A.3) a) Par définition d'une limite finie en $+\infty$, il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists T_0 > 0, \qquad t \geq T_0 \Longrightarrow |f(t) - \ell| \leq \varepsilon.$$

En choisissant $\varepsilon = 1$, on a donc

$$\exists T_0 > 0, \qquad t \geq T_0 \Longrightarrow \ell - 1 \leq f(t) \leq \ell + 1,$$

ce qui montre que f est bornée sur $[T_0; +\infty[$. En outre, elle est continue, donc également bornée sur le segment $[0; T_0]$. Finalement, f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ (qui est la réunion de ces deux intervalles).

b) La fonction $g : t \mapsto te^{\gamma t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (c'est le produit de deux fonctions continues), et on a $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$ (par croissances comparées car $\gamma < 0$). Donc g est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par la question précédente.

II.B - Variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel

II.B.1) Notons $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. La série à termes positifs $\sum\limits_{n\geq 0} e^{\alpha|x_n|}\mathbb{P}(X = x_n)$ converge par hypothèse, et on a (puisque $\alpha > 0$)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq e^{\alpha x_n}\mathbb{P}(X = x_n) \leq e^{\alpha|x_n|}\mathbb{P}(X = x_n),$$

donc par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum\limits_{n\geq 0} e^{\alpha x_n}\mathbb{P}(X = x_n)$ converge (absolument), c'est-à-dire que $e^{\alpha X}$ admet une espérance finie.

II.B.2) a) Puisque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, donc sous réserve de convergence de la série positive suivante, on a

$$\mathbb{E}(e^{\alpha|X|}) = \mathbb{E}(e^{\alpha X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\alpha n}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{\alpha})^n}{n!}.$$

On reconnaît le développement en série entière de l'exponentielle, donc cette série converge pour tout réel α. La variable X possède donc un moment exponentiel d'ordre α pour tout $\alpha > 0$, et

$$\forall \alpha > 0, \qquad \mathbb{E}(e^{\alpha X}) = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{\alpha}} = e^{\lambda(e^{\alpha}-1)}.$$

b) Puisque $Y \sim \mathcal{G}(p)$, on a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(Y = n) = p(1-p)^{n-1}$, donc sous réserve de convergence de la série positive suivante, on a

$$\mathbb{E}(e^{\alpha|Y|}) = \mathbb{E}(e^{\alpha Y}) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\alpha n}p(1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}((1-p)e^{\alpha})^n$$

Cette série géométrique converge pour tout réel α tel que $(1-p)e^{\alpha} < 1$. La variable Y possède donc un moment exponentiel d'ordre α pour tout $\alpha \in]0; -\ln(1-p)[$ et

$$\forall \alpha \in]0; -\ln(1-p)[, \qquad \mathbb{E}(e^{\alpha Y}) = \frac{pe^{\alpha}}{1-(1-p)e^{\alpha}}.$$

c) Puisque $Z \sim \mathcal{B}(n,p)$, on a $Z(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et $\mathbb{P}(Z = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. La variable aléatoire $e^{\alpha|Z|} = e^{\alpha Z}$ étant d'image finie, elle possède une espérance, donc Z possède un moment exponentiel d'ordre α pour tout $\alpha > 0$ (même pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ en fait), et

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{E}(e^{\alpha Z}) = \sum_{k=0}^{n} e^{\alpha k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = (pe^{\alpha}+1-p)^n$$

(d'après la formule du binôme).

II.C - Une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right)$

II.C.1) a) Pour tout réel u, on a $e^u \geq 1 + u \geq u$ (se montre facilement avec une étude de fonction), donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \alpha|x_p|\mathbb{P}(X = x_p) \leq e^{\alpha|x_p|}\mathbb{P}(X = x_p).$$

Puisque par hypothèse la série $\sum\limits_{p\geq 0} e^{\alpha|x_p|}\mathbb{P}(X = x_p)$ converge, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que $\sum\limits_{p\geq 0} |x_p|\mathbb{P}(X = x_p)$ converge, c'est-à-dire que X admet une espérance finie.

b) Justifions que X possède un moment d'ordre 2 : puisque $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{x^2}{e^{\alpha|x|}} = 0$ (dû à $\alpha > 0$), il existe $a > 0$ tel que $|x| \geq a \Longrightarrow x^2 \leq e^{\alpha|x|}$. On a donc (en distinguant les cas $|x| < a$ et $|x| \geq a$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \leq a^2 + e^{\alpha|x|}.$$

Ceci amène la majoration :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad |x_p|^2\mathbb{P}(X = x_p) \leq a^2\mathbb{P}(X = x_p) + e^{\alpha|x_p|}\mathbb{P}(X = x_p).$$

Puisque les séries $\sum\limits_{p\geq 0} a^2\mathbb{P}(X = x_p)$ et $\sum\limits_{p\geq 0} e^{\alpha|x_p|}\mathbb{P}(X = x_p)$ convergent, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que $\sum\limits_{p\geq 0} |x_p|^2\mathbb{P}(X = x_p)$ converge.

Les variables $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ (qui sont réelles, discrètes et ont la même loi, celle de X), possèdent donc toutes un moment d'ordre 2, et elles sont deux à deux indépendantes (puisque mutuellement indépendantes par hypothèse), donc on peut appliquer la loi faible des grands nombres : en notant $m = E(X)$ et $\sigma^2 = V(X)$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

II.C.2) a) La série de fonctions $t \mapsto \sum\limits_{p\geq 0} e^{tx_p}\mathbb{P}(X = x_p)$ converge normalement sur le segment $[-\alpha;\alpha]$: en effet,

$$\forall t \in [-\alpha;\alpha], \quad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \left|e^{tx_p}\mathbb{P}(X = x_p)\right| \leq e^{\alpha|x_p|}\mathbb{P}(X = x_p),$$

et la série $\sum\limits_{p\geq 0} e^{\alpha|x_p|}\mathbb{P}(X = x_p)$ converge par hypothèse.

Cette convergence normale a deux conséquences :

- d'une part, elle entraîne la convergence absolue pour tout $t \in [-\alpha;\alpha]$, ce qui montre que $\mathbb{E}(e^{tX})$ est bien définie.
- d'autre part, elle entraîne la convergence uniforme sur $[-\alpha;\alpha]$, ce qui montre (puisque les $t \mapsto e^{tx_p}\mathbb{P}(X = x_p)$ sont continues) la continuité de la fonction somme $\Psi : t \mapsto \mathbb{E}(e^{tX})$ sur $[-\alpha;\alpha]$.

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto e^{tx_p}\mathbb{P}(X = x_p)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Considérons la série dérivée :

$$t \mapsto \sum_{p\geq 0} \frac{d}{dt}\left(e^{tx_p}\mathbb{P}(X = x_p)\right) = \sum_{p\geq 0} x_p e^{tx_p}\mathbb{P}(X = x_p).$$

Montrons que cette série de fonctions converge normalement sur tout segment $[-\beta;\beta]$ avec $0 < \beta < \alpha$. On a

$$\begin{array}{llll} \forall t \in [-\beta;\beta], \quad \forall p \in \mathbb{N}, & |x_p e^{tx_p}\mathbb{P}(X = x_p)| & \leq & |x_p|e^{\beta|x_p|}\mathbb{P}(X = x_p) \\ & & = & |x_p|e^{(\beta-\alpha)|x_p|} \times e^{\alpha|x_p|}\mathbb{P}(X = x_p). \end{array}$$

En utilisant la question **II.A.3**)*b*), on obtient, puisque $\beta - \alpha < 0$, qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall p \in \mathbb{N},\ |x_p|e^{(\beta-\alpha)|x_p|} \leq M$.
D'où la majoration

$$\forall t \in [-\beta;\beta], \quad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \left|x_p e^{tx_p}\mathbb{P}(X = x_p)\right| \leq Me^{\alpha|x_p|}\mathbb{P}(X = x_p),$$

qui montre bien la convergence normale voulue puisque $\sum\limits_{p\geq 0} e^{\alpha|x_p|}\mathbb{P}(X = x_p)$ converge par hypothèse.

Finalement, on peut appliquer le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: la série $t \mapsto \sum\limits_{p\geq 0} e^{tx_p}\mathbb{P}(X = x_p)$ converge simplement sur

$[-\alpha;\alpha]$ et sa série dérivée converge uniformément sur tout segment $[-\beta;\beta]\subset]-\alpha;\alpha[$, donc la fonction somme Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc dérivable) sur $]-\alpha;\alpha[$ et

$$\forall t\in]-\alpha;\alpha[,\qquad \Psi'(t)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{d}{dt}\left(e^{tx_p}\mathbb{P}(X=x_p)\right)=\mathbb{E}(Xe^{tX}).$$

II.C.3) a) On a directement $f_\varepsilon(0)=\Psi(0)=\mathbb{E}(1)=1$, et

$$\forall t\in]-\alpha,\alpha[,\qquad f'_\varepsilon(t)=\left(-(m+\varepsilon)\Psi(t)+\Psi'(t)\right)e^{-(m+\varepsilon)t},$$

donc $f'_\varepsilon(0)=-(m+\varepsilon)\underbrace{\Psi(0)}_{=1}+\underbrace{\Psi'(0)}_{=E(X)=m}=-\varepsilon.$

b) Faisons un développement limité d'ordre 1 en 0 : il existe une fonction $u:]-\alpha;\alpha[\to\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{t\to 0}u(t)=0$ et

$$\forall t\in]-\alpha;\alpha[,\qquad f_\varepsilon(t)=f_\varepsilon(0)+tf'_\varepsilon(0)+tu(t)=1+t(-\varepsilon+u(t)).$$

Par définition d'une limite nulle, il existe $\beta\in]0;\alpha[$ tel que

$$t\in[-\beta;\beta]\Longrightarrow |u(t)|\le\frac{\varepsilon}{2}\Longrightarrow f_\varepsilon(t)\in\left[1-\frac{3t\varepsilon}{2};1-\frac{t\varepsilon}{2}\right].$$

En choisissant alors t strictement positif et suffisamment petit, on obtient

$$\exists t_0\in]0;\alpha[,\quad f_\varepsilon(t_0)\in]0;1[$$

(par exemple avec $t_0=\min\left(\beta;\frac{1}{3\varepsilon}\right)$, on a $f_\varepsilon(t_0)\in[\frac{1}{2};1[$).

II.C.4) Soit $t\in[-\alpha;\alpha]$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a $e^{tS_n}=\prod\limits_{k=1}^{n}e^{tX_k}$. Puisque les variables $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ suivent la même loi que X, les variables $(e^{tX_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ admettent toutes une espérance finie (d'après **II.C.2**)a)), égale à $\Psi(t)$. En outre, l'indépendance mutuelle des (X_k) donne l'indépendance mutuelle des (e^{tX_k}), donc par produit, la variable e^{tS_n} est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(e^{tS_n})=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}(e^{tX_k})=\prod_{k=1}^{n}\Psi(t)=(\Psi(t))^n.$$

II.C.5) a) Soit $t\in]0;\alpha]$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque $t>0$ et que exp est strictement croissante, les événements $\left(\dfrac{S_n}{n}\ge m+\varepsilon\right)$, $(tS_n\ge tn(m+\varepsilon))$, et $\left(e^{tS_n}\ge e^{tn(m+\varepsilon)}\right)$ sont égaux. Donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\ge m+\varepsilon\right)=\mathbb{P}\left(e^{tS_n}\ge e^{tn(m+\varepsilon)}\right)=\mathbb{P}\left(e^{tS_n}\ge\left(e^{t(m+\varepsilon)}\right)^n\right).$$

La variable aléatoire e^{tS_n} admettant une espérance, on a en appliquant l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}\left(e^{tS_n}\ge\left(e^{t(m+\varepsilon)}\right)^n\right)\le\frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{\left(e^{t(m+\varepsilon)}\right)^n}=\frac{(\Psi(t))^n}{\left(e^{t(m+\varepsilon)}\right)^n}=\left(e^{-t(m+\varepsilon)}\Psi(t)\right)^n,$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\ge m+\varepsilon\right)\le(f_\varepsilon(t))^n.$$

b) On choisit $t=t_0$ (le réel obtenu à la question **II.C.3**)b)) dans l'inégalité précédente (qui est vraie pour tout $t\in]0;\alpha]$). En posant $r=f_\varepsilon(t_0)$, on a alors $r\in]0;1[$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\ge m+\varepsilon\right)\le r^n.$$

II.C.6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right| \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq m+\varepsilon\right)+\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq m-\varepsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq m+\varepsilon\right)+\mathbb{P}\left(\frac{-S_n}{n} \geq -m+\varepsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \geq E(X)+\varepsilon\right)+\mathbb{P}\left(\frac{-X_1-\cdots-X_n}{n} \geq E(-X)+\varepsilon\right).\end{aligned}$$

On utilise alors le résultat montré à la question **II.C.5)**b), qui s'énonce ainsi : pour tous réels $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$, pour toute variable aléatoire discrète T telle que $e^{\alpha|T|}$ est d'espérance finie, et pour toute suite (T_k) de variables mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de T, on a :

$$\exists r \in]0;1[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}\left(\frac{T_1+\cdots+T_n}{n} \geq E(T)+\varepsilon\right) \leq r^n.$$

En appliquant ce résultat à $T = X$, puis à $T = -X$ (on peut car $-X$ suit les mêmes hypothèses que X, et les $(-X_k)$ suivent la même loi que $-X$), on obtient l'existence de deux réels r_1, r_2 de $]0;1[$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} \mathbb{P}\left(\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n} \geq E(X)+\varepsilon\right) \leq r_1^n \\ \mathbb{P}\left(\dfrac{-X_1-\cdots-X_n}{n} \geq E(-X)+\varepsilon\right) \leq r_2^n \end{cases}.$$

Par somme, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right| \geq \varepsilon\right) \leq r_1^n + r_2^n.$$

La suite majorante $(u_n) = (r_1^n + r_2^n)$ tend bien vers 0 et on a

$$u_n^c = \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{r_1^{n+1}+r_2^{n+1}}{r_1^n+r_2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \max(r_1;r_2) \in]0;1[.$$

Donc la vitesse de convergence de (u_n) est géométrique de rapport $\ell^c = \max(r_1; r_2)$.
La majoration obtenue avec la loi faible des grands nombres (à savoir $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$), elle, donne seulement une convergence lente, puisqu'en posant $v_n = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, et $v_n^c = \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

II.D - Une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right)$

II.D.1) Pour $\alpha > 0$, on a $\forall p \in \mathbb{N}$, $e^{\alpha|x_p|}\mathbb{P}(X = x_p) \leq e^{\alpha c}\mathbb{P}(X = x_p)$ puisque $\forall p \in \mathbb{N}$, $|x_p| \leq c$ par hypothèse. Puisque la série $\sum\limits_{p\geq 0} e^{\alpha c}\mathbb{P}(X = x_p)$ converge (vers $e^{\alpha c}$, étant donné que $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_p) = 1$), on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que $\sum\limits_{p\geq 0} e^{\alpha|x_p|}\mathbb{P}(X = x_p)$ converge, et donc que $\mathbb{E}\left(e^{\alpha|X|}\right)$ existe.

II.D.2) a) Puisque $Y = \frac{1}{2} - \frac{X}{2c}$, on a $2cY = c - X$, donc

$$X = c - 2cY = c - cY - cY = -cY + (1-Y)c.$$

b) On fixe $\omega \in \Omega$ et on utilise l'inégalité montrée en **II.A.2**), avec les réels $a = -c$, $b = c$ (on a bien $a < b$) et $\lambda = Y(\omega) = \frac{c-X(\omega)}{2c} \in [0;1]$ (puisque $-c \leq X(\omega) \leq c$) :

$$e^{X(\omega)} = e^{Y(\omega)(-c)+(1-Y(\omega))c} \leq Y(\omega)e^{-c} + (1-Y(\omega))e^c.$$

Ceci étant vrai pour tout $\omega \in \Omega$, on en déduit

$$e^X \leq Ye^{-c} + (1-Y)e^c.$$

II.D.3) a) Par linéarité de l'espérance, la variable Y est d'espérance finie (comme X), et

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2c}\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}.$$

Par croissance de l'espérance, l'inégalité établie à la question précédente donne :

$$\mathbb{E}(e^X) \leq \mathbb{E}(Ye^{-c} + (1-Y)e^c) = e^{-c}\mathbb{E}(Y) + e^c(1-\mathbb{E}(Y)) = \frac{1}{2}(e^{-c}+e^c) = \cosh(c).$$

b) A la question précédente, nous avons montré que pour toute variable T d'espérance nulle et bornée par M, nous avons $\mathbb{E}(e^T) \leq \cosh(M)$. On applique ce résultat avec $T = tX$, où $t > 0$ est fixé (on peut car $\mathbb{E}(tX) = t\mathbb{E}(X) = 0$ et $|tX| \leq tc$). On obtient :

$$\forall t > 0, \qquad \Psi(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \cosh(ct).$$

II.D.4) Par définition de f_ε, on a $f_\varepsilon(t) = e^{-\varepsilon t}\Psi(t)$ (car $m = 0$ ici). La question précédente combinée à l'inégalité montrée en **II.A.1)**$b)$ donne

$$\forall t > 0, \qquad f_\varepsilon(t) \leq e^{-\varepsilon t}\cosh(ct) \leq e^{-\varepsilon t}e^{c^2t^2/2} = e^{-t\varepsilon + \frac{1}{2}c^2t^2}.$$

II.D.5) Utilisons **II.C.5)**$a)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq (f_\varepsilon(t))^n$$

(en effet $m = \mathbb{E}(X) = 0$ et f_ε est définie sur tout $\mathbb{R}$ ici).
L'inégalité de la question précédente donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \left(e^{-t\varepsilon + \frac{1}{2}c^2t^2}\right)^n,$$

d'où en choisissant $t = \frac{\varepsilon}{c^2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2c^2}}.$$

Majorons maintenant $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right)$. Par additivité de $\mathbb{P}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq -\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(\frac{-S_n}{n} \geq \varepsilon\right).$$

On vient de voir comment majorer le premier terme.
Pour majorer le second terme, on applique tout ce qui précède à la variable $-X$ au lieu de X (on peut car $\mathbb{E}(-X) = -\mathbb{E}(X) = 0$ et $|-X| = |X| \leq c$). Cela revient à remplacer chaque X_k par $-X_k$, et donc S_n par $-S_n$: il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}\left(\frac{-S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2c^2}}.$$

Par somme, on obtient finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2c^2}}.$$

II.D.6) Puisque $Z \sim \mathcal{B}(n,p)$, il existe des variables mutuellement indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ suivant toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et telles que $X_1 + \cdots + X_n = Z$. On a donc

$$P\left(\left|\frac{Z}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{(X_1-p) + \cdots + (X_n-p)}{n}\right| \geq \varepsilon\right).$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de la question précédente avec les variables aléatoires $Y_k = X_k - p$, qui sont bien centrées car l'espérance de la loi $\mathcal{B}(p)$ est p, et qui sont bornées car $|Y_k| \leq c = \max(p; 1-p)$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$. Cela donne :

$$P\left(\left|\frac{Z}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(\frac{-n\varepsilon^2}{2\max(p;1-p)^2}\right).$$