

Partie I. Quelques valeurs de la fonction θ

I.1. Calcul de $\theta(1)$

I.1.1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$

I.1.2. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge grossièrement si $x \leq 0$, et converge pour $x > 0$: en effet,

dans ce dernier cas, la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ tend vers zéro en décroissant, la convergence résulte donc du critère spécial des séries alternées. On a donc bien $D_\theta = E = \mathbb{R}_+^*$.

I.1.3.

I.1.3.1. Sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par exemple, on a $\tan = \frac{\sin}{\cos} = -\frac{(\cos)'}{\cos} = (-\ln \circ \cos)'$.
Donc

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt = \left[-\ln(\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\ln 2}{2}.$$

I.1.3.2. Posons $f_n(t) = (\tan t)^n$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $n \in \mathbb{N}^*$; on a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\\ 1 & \text{si } t = \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

La suite de fonctions continues (f_n) converge donc simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ vers la fonction f continue par morceaux qui vaut 0 sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ et 1 au point $\frac{\pi}{4}$. Enfin, on a $|f_n(t)| \leq 1$, la fonction constante $t \mapsto 1$ étant intégrable sur le segment $S = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Le théorème de convergence dominée permet d'affirmer alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S f_n = \int_S \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \int_S f = 0.$$

I.1.3.3. En utilisant le changement de variable $u = \tan t$, on a

$$J_n + J_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 t) (\tan t)^n \, dt = \int_0^1 u^n \, du = \frac{1}{n+1}.$$

Remarque. Cela permet de retrouver avec des arguments plus élémentaires le résultat de la question précédente : les intégrales J_n étant positives, on a $0 \leq J_n \leq J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ et, de cet encadrement, on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

I.1.3.4. Pour tout entier naturel non nul k , on a $\frac{1}{2k} = J_{2k-1} + J_{2k+1}$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (J_{2k-1} + J_{2k+1}) \\ &= (J_1 + J_3) - (J_3 + J_5) + \cdots + (-1)^{n+1} (J_{2n-1} + J_{2n+1}) \\ &= J_1 + (-1)^{n+1} J_{2n+1} \end{aligned}$$

après télescopage.

I.1.3.5. On fait tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{2n+1} = 0$:

on obtient $\frac{1}{2} \theta(1) = J_1$, donc $\theta(1) = 2 J_1 = \ln 2$.

I.2. Une valeur approchée de $\theta(3)$.

I.2.1. $s := 0$; pour k de 1 à n faire $s := s + (-1)^{k+1}/k^3$; afficher s .

I.2.2. La valeur approchée décimale à 10^{-4} près par défaut de S_{30} est $\sigma = 0,9015$.

I.2.3. Du critère spécial des séries alternées, on déduit que la somme $\theta(2)$ de la série est encadrée par deux sommes partielles consécutives, par exemple $S_{30} < \theta(2) < S_{31}$. Comme S_{31} admet aussi σ pour valeur approchée décimale à 10^{-4} près par défaut, on conclut.

I.3. Calcul de $\theta(2)$ et $\theta(4)$.

I.3.1. On a $\alpha_0 = \frac{\pi^3}{3}$ et, par deux intégrations par parties, on obtient $\alpha_n = \frac{2\pi}{n^2}(-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

I.3.2. La fonction g est paire donc $b_n(g) = 0$ et $a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \alpha_n$. Ainsi, $a_0(g) = \frac{2\pi^2}{3}$ et, pour n entier naturel non nul, $a_n(g) = \frac{4}{n^2}(-1)^n$.

I.3.3. Posons $h_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$. De $|h_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, on déduit la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 1} h_n(x)$ pour tout x réel et, même mieux, la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} h_n$ sur $\mathbb{R}$. La fonction g est 2π -périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, elle est donc somme sur $\mathbb{R}$ de sa série de Fourier (et cette dernière converge normalement, mais c'est la constatation déjà faite plus haut). On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g) \cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx),$$

soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \frac{1}{4} \left(g(x) - \frac{\pi^2}{3} \right)$. En particulier,

$$\forall x \in]-\pi, \pi] \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}.$$

I.3.4. On évalue cette dernière relation pour $x = 0$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\theta(2) = -\frac{\pi^2}{12}$, donc

$$\theta(2) = \frac{\pi^2}{12}.$$

I.3.5. La convergence de la série de Riemann d'exposant 4 est un résultat du cours. Pour calculer sa somme, utilisons la formule de Parseval.

En posant $\|g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5}$, on a

$$\|g\|_2^2 = \frac{|a_0(g)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(g)|^2 = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4},$$

d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \right) = \frac{\pi^4}{90}$. *Il serait facile d'en déduire la valeur de $\theta(4)$ en séparant les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs, mais suivons l'énoncé...*

I.3.6. La série proposée converge normalement sur $\mathbb{R}$ par rapport au paramètre x puisque le terme général est majoré, en valeur absolue, par $\frac{1}{n^3}$. La convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} h_n$ (question **I.3.3.**) permet d'intégrer terme à terme sur le segment $[0, x]$ ou $[x, 0]$ pour $x \in]-\pi, \pi]$, cela donne

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x h_n(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} h_n(t) \right) dt \\ &= \int_0^x \left(\frac{t^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right) dt = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi^2 x}{12}. \end{aligned}$$

I.3.7. La série proposée converge toujours normalement sur $\mathbb{R}$ par rapport au paramètre x . La convergence normale de la série proposée en **I.3.6.** permet toujours d'intégrer terme à terme sur le segment $[0, x]$ ou $[x, 0]$ avec $x \in]-\pi, \pi]$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\frac{t^3}{12} - \frac{\pi^2 t}{12} \right) dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(nt)}{n^3} \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n \sin(nt)}{n^3} dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1} \cos(nt)}{n^4} \right]_0^x \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^4} - \theta(4), \end{aligned}$$

$$\text{soit } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^4} = \frac{\pi^2 x^2}{24} - \frac{x^4}{48} - \theta(4).$$

I.3.8. On évalue pour $x = \pi$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{24} - \frac{\pi^4}{48} - \theta(4).$$

$$\text{Après réduction, } \theta(4) = \frac{7\pi^4}{720}.$$

Partie II. Étude d'une fonction

II.1. Si $x < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = +\infty$; si $x = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \ln 2$: dans ces deux cas, la série de terme général $u_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$, donc $u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-nx}$: par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $u_n(x)$ converge. En conclusion, $D_f =]0, +\infty[$.

II.2. Soit $a > 0$. Pour $x \in [a, +\infty[$, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \ln(1 + e^{-nx}) \leq \ln(1 + e^{-na})$ (terme général d'une série convergente). La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge donc normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Les fonctions u_n étant continues, on en déduit la continuité de la somme f sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (par addition d'inégalités de même sens, l'une au moins étant stricte).

II.4. C'est le théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Comme f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^$, on peut préciser que f établit une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathcal{E}$, et que $\mathcal{E} = f(]0, +\infty[) =]\lim_{+\infty} f, \lim_{0+} f[$.*

II.5. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[1, +\infty[$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = \ln 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$. Par le théorème d'interversion limite-somme, on déduit que $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 2$.

II.6.

II.6.1. C'est l'intégrale impropre d'une fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$, et on a $\psi_x(t) = \ln(1 + e^{-tx}) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-xt}$. Or on sait que, pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il en est donc de même de la fonction ψ_x .

II.6.2. Pour tout $x > 0$ fixé, la fonction ψ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \psi_x(n+1) \leq \int_n^{n+1} \psi_x(t) dt \leq \psi_x(n).$$

On en déduit que

$$\int_n^{n+1} \psi_x(t) dt \leq \psi_x(n) = u_n(x) \leq \int_{n-1}^n \psi_x(t) dt$$

(la première inégalité est vraie pour tout n entier naturel, la deuxième à partir du rang 1). En sommant ces inégalités (les séries et intégrales impropres étant convergentes), on obtient

$$\int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x) \leq \ln 2 + \int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt.$$

II.6.3. La fonction $y \mapsto \frac{\ln(1+y)}{y}$ est continue sur $]0, 1]$, et prolongeable par continuité en 0 (avec la valeur 1) d'où l'existence de l'intégrale. On la calcule maintenant par une intégration terme à terme.

Sur l'intervalle $I =]0, 1[$, on a $\frac{\ln(1+y)}{y} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(y)$, en posant $f_n(y) = (-1)^{n-1} \frac{y^{n-1}}{n}$.
Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur I , la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$

converge simplement sur I vers la fonction $y \mapsto \frac{\ln(1+y)}{y}$, et la série de terme général

$\int_I |f_n| = \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{n} dy = \frac{1}{n^2}$ converge, on peut donc intervertir série et intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^{n-1}}{n} \right) dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 y^{n-1} dy \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \theta(2) . \end{aligned}$$

II.6.4. Le changement de variable $y = e^{-tx}$ donne

$$\int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt = \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-tx}) dt = - \int_1^0 \frac{\ln(1+y)}{xy} dy = \frac{\theta(2)}{x} .$$

La question **II.6.2.** donne alors

$$\frac{\theta(2)}{x} \leq f(x) \leq \ln 2 + \frac{\theta(2)}{x} ,$$

soit l'encadrement recherché avec $\lambda = \ln 2$ et $\mu = \theta(2) = \frac{\pi^2}{12}$.

II.6.5. Donc $\theta(2) \leq x f(x) \leq x \ln 2 + \theta(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x) = \theta(2) = \frac{\pi^2}{12}$. Donc $f(x) \sim \frac{\pi^2}{12x}$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, et notamment $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Ainsi, $\mathcal{E} =]\ln 2, +\infty[$.

Partie III. Propriétés de la fonction θ

Dans toute cette partie, on notera $v_k(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$; on

notera aussi $\theta_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$ la somme partielle d'ordre n de la série définissant $\theta(x)$.

III.1. La suite $\left(\frac{1}{k^x}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers zéro. D'après le critère spécial des séries alternées, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \theta_{2p}(x) \leq \theta(x) \leq \theta_{2p-1}(x) .$$

En particulier, $1 - \frac{1}{2^x} = \theta_2(x) \leq \theta(x) \leq \theta_1(x) = 1$.

III.2. Pour tout x strictement positif, on a $0 < \frac{1}{2^x} = e^{-x \ln 2} < 1$, donc $0 \leq \theta(x) \leq 1$: la fonction

θ est bornée sur E . De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^x}\right) = 1$. L'encadrement de la question précédente montre alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = 1$.

III.3. Continuité de la fonction θ

III.3.1. Soit $a \in]1, +\infty[$. Pour $x \in [a, +\infty[$, on a $|v_k(x)| \leq \frac{1}{k^a}$ (terme général d'une série convergente) : on a ainsi prouvé la convergence normale sur $[a, +\infty[$ de la série $\sum_{k \geq 1} v_k$.

Chacune des fonctions v_k étant continue, on en déduit la continuité de la fonction somme θ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$, donc la continuité sur $]1, +\infty[$.

III.3.2. Du critère spécial des séries alternées, on déduit aussi que $|\theta(x) - \theta_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$. Fixons alors $a > 0$; pour $x \in [a, +\infty[$, on a $|\theta(x) - \theta_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^a} = 0$, il y a donc convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ de la série de fonctions définissant θ . Comme en **III.3.1.**, on en déduit que θ est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $E = \mathbb{R}_+^*$.

III.4. Caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction θ

III.4.1. On calcule d'abord $\varphi'_x(t) = \frac{1 - x \ln t}{t^{x+1}}$.

III.4.1.1. Si $x \geq \frac{1}{\ln 2}$, alors, comme $\ln t \geq \ln 2$ sur $[2, +\infty[$, on a $x \ln t \geq 1$ donc $\varphi'_x(t) \leq 0$ et φ_x est (strictement) décroissante sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

III.4.1.2. Si $0 < x < \frac{1}{\ln 2}$, on a $e^{\frac{1}{x}} > 2$ et la fonction φ_x est strictement croissante sur l'intervalle $[2, e^{\frac{1}{x}}]$, strictement décroissante sur $[e^{\frac{1}{x}}, +\infty[$.

III.4.2. Notons d'abord que chaque fonction v_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $E = \mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall k \geq 2 \quad v'_k(x) = (-1)^k \frac{\ln k}{k^x} = (-1)^k \varphi_x(k).$$

Notons aussi que la fonction v_1 est constante, donc $v'_1 = 0$.

III.4.2.1. Pour $x \in [\frac{1}{\ln 2}, +\infty[$, la suite de terme général $|v'_k(x)| = \varphi_x(k)$ est décroissante à partir du rang 2 (d'après la question **III.4.1.1.**) et elle tend vers zéro (croissances comparées) donc, toujours d'après le critère spécial des séries alternées, le reste

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^x} \quad \text{vérifie} \quad |r_n(x)| \leq |v'_{n+1}(x)| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{1}{\ln 2}}}.$$

Cette dernière expression majorante tendant vers zéro indépendamment de x , on a prouvé la convergence uniforme sur l'intervalle $[\frac{1}{\ln 2}, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v'_n$ (la suite des restes converge uniformément vers la fonction nulle). On en déduit que la fonction

$$\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \quad \text{est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur cet intervalle.}$$

III.4.2.2. Soit $a > 0$, si $x \in [a, +\infty[$, la suite $(|v'_n(x)|)_{n \geq 2}$ est décroissante à partir du rang $1 + E\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$, donc au moins à partir du rang $N = 1 + E\left(e^{\frac{1}{a}}\right)$. La série

$\sum_{n \geq N} v'_n(x) = \sum_{n \geq N} (-1)^n |v'_n(x)|$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées : pour tout $x \in [a, +\infty[$, la suite $(|v'_n(x)|)_{n \geq N}$ tend vers zéro en décroissant. On a donc, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [a, +\infty[$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v'_k(x) \right| \leq |v'_{n+1}(x)| \leq |v'_{n+1}(a)| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La série de fonctions $\sum_{n \geq N} v'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, la fonction $\sum_{n=N}^{+\infty} v_n$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. Donc θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

III.4.3.

III.4.3.1. On a $\theta'(2) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \varphi_2(n)$. Or, $2 > \frac{1}{\ln 2}$, donc la suite $(\varphi_2(n))$ est strictement décroissante à partir du rang 2 d'après **III.4.1.1.**, et elle tend vers zéro ; il résulte donc du critère spécial des séries alternées que la somme de la série est du même signe que son premier terme, à savoir $\theta'(2) > 0$.

III.4.3.2. On a $\theta'(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \varphi_1(n)$. La fonction φ_1 est décroissante seulement sur $[e, +\infty[$, donc la suite $(\varphi_1(n))$ est strictement décroissante à partir du rang 3, et elle tend vers zéro. Le critère spécial (encore!) permet alors d'encadrer la somme $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \varphi_1(n)$ entre deux sommes partielles consécutives. En rajoutant à chaque membre d'un tel encadrement le terme $\varphi_1(2)$, on peut aussi encadrer la somme $\theta'(1) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ entre deux sommes partielles consécutives. Ainsi, par exemple,

$$\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5} \leq \theta'(1) \leq \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4}.$$

Comme le minorant est strictement positif (valeur approchée 0,005056), on a $\theta'(1) > 0$.