# e3a 2016 - PSI 2
# Un corrigé

## Préliminaires

1. On écrit que
$$u = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$
On distingue alors trois cas.
   - Si $\theta \in [0,\pi[$ alors $\cos(\theta/2) > 0$. On a alors $|u| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(u) = \frac{\theta}{2}$.
   - Si $\theta = \pi$ alors $u = 0$. Le module est nul et l'argument non défini.
   - Si $\theta \in ]\pi, 2\pi[$ alors $\cos(\theta/2) < 0$. On a alors $|u| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(u) = \pi + \frac{\theta}{2}$.
2. (a) Les racines de $P_n$ sont à égale distance de $i$ et $-i$, donc sur la médiatrice du segment $[-i, i]$, i.e. laxe des réels.
   i. Le calcul donne
   $$P_1 = 3X^2 - 1 \quad \text{et} \quad P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1$$
   ii. Il est immédiat que $P_1$ est de degré 2 et $P_2$ de degré 4. A fortiori, on a $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$.
   Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ étant les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 sans racine réelle (ou encore à discriminant négatif), ni $P_1$ (qui admet $\frac{1}{\sqrt{3}}$ comme racine) ni $P_2$ (qui est de degré 4) ne sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

   (b) i. $P_n$ est différence de deux polynômes de degré $2n+1$ et est donc dans $C_{2n+1}[X]$. Le coefficient de $X^{2n+1}$ dans $P_n$ est
   $$\frac{1}{2i}(1-1) = 0$$
   et donc $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Le coefficient de $X^{2n}$ dans $P_n$ est
   $$\frac{1}{2i}\left((2n+1)i - (2n+1)(-i)\right) = 2n+1 \neq 0$$
   Ainsi, $P_n$ est de degré $2n$ et son coefficient dominant est $2n+1$.
   ii. Les racines $N$-ièmes de l'unité sont les complexes
   $$e^{\frac{2ik\pi}{N}} \quad \text{pour} \quad k = 0, \dots, N-1$$
   iii. On a
   $$P_n(i) = \frac{(2i)^{2n+1}}{2i} = 2^{2n}(-1)^n$$
   iv.
   v. Supposons que $a$ soit racine de $P_n$. On a alors $a \neq i$ et $\left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 0$. Il existe donc $k \in [|0, 2n+1|]$ tel que
   $$\frac{a+i}{a-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$
   et donc (produit en croix)
   $$a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$$
   On remarque alors que $k \neq 0$ car pour $k = 0$ la relation précédente est fausse ($0 \neq i$).
   Réciproquement, si $a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$ avec $k \in [|0, 2n|]$, on a $(a+i) = (a-i)e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$. En élevant à la puissance $2n+1$ on trouve que $(a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1}$ et donc que $P_n(a) = 0$

vi. Les racines de $P_n$ sont donc les

$$a_k = \frac{i(e^{2ik\pi/(2n+1)}+1)}{(e^{2ik\pi/(2n+1)}-1)} = i\frac{2\cos(k\pi/(2n+1))}{2i\sin(k\pi/(2n+1))} = \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k = 1, \dots, 2n$. On trouve bien des récines toutes réelles.
*Remarque :* cotan *étant bijective de* $]0, \pi[$ *dans* $\mathbb{R}$ *et les* $2k\pi/(2n+1)$ *étant dans* $]0, \pi[$*, les* $a_k$ *sont 2 à 2 distincts. Il y en a* $2n$ *et* $P_n$ *est de degré* $2n$*. On a donc* $2n$ *racines simples et* $P_n$ *est scindé simple sur* $\mathbb{R}[X]$*.*

vii. On développe les deux puissances par formule du binôme et on regroupe les termes :

$$2iP_n(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k i^{2n+1-k}(1-(-1)^{2n+1-k})$$

Les termes d'indice $k$ pairs sont nuls. Il reste donc

$$2iP_n(X) = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^{2k} i^{2n+1-2k} = 2i\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^{2k}$$

On en déduit que

$$P_n(X) = Q_n(X^2) \text{ avec } Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^k$$

viii. 2.a.i donne

$$Q_1 = 3\left(X - \frac{1}{3}\right) \quad \text{et} \quad Q_2 = 5X^2 - 10X + 1 = 5\left(X - \frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)\left(X - \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)$$

La factorisation donne les racines.

ix. Si $a$ est racine de $P_n$ alors $a^2$ est racine de $Q_n$. En particulier, on a les racines

$$\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k = 1, \dots, n$. Ces racines sont distinctes car les $a_k$ sont distincts et positifs pour ces valeurs de $k$ (les carrés sont donc aussi distincts). Ceci donne $n$ racines distinctes de $Q_n$ qui est de degré $n$ et donc toutes les racines.

3. $S_n$ est la somme des racines $b_k$ de $Q_n$ qui est scindé à racines simples et s'écrit (son coefficient dominant est celui de $P_n$)

$$Q_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(X - b_k) = (2n+1)\left(X^n - \sum_{k=1}^{n} b_k X^{n-1} + \dots + (-1)^n b_1 \dots b_n\right)$$

On voit que l'on a besoin du coefficient de $X^{n-1}$ dans $Q_n$ qui vaut $-\binom{2n+1}{2n-2}$. On a ainsi

$$S_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{2n-2} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

4. Pour voir que $\sin(x) \le x \le \tan(x)$, on montre que a courbe de sin est sur $[0, \pi/2[$ sous sa tangente et celle de tan au-dessus. Il s'agit donc d'inégalités de convexité (sin est concave sur $[0, \pi/2[$ puisqu'à dérivée seconde négative ; tan est convexe sur cet intervalle puisqu'à dérivée seconde positive). $\sin(x) \ge 0$ est immédiat sur $[0, \pi/2[$.
Comme $y \mapsto 1/y^2$ décroît sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit que

$$\forall x \in ]0, \pi/2[, \ \frac{1}{\tan^2(x)} \le \frac{1}{x^2} \le \frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

5. Pour $k = 1, \dots, n$, $\frac{k\pi}{2n+1} \in ]0, \pi/2[$ et donc

$$S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq n + S_n$$

ce qui donne

$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2(n+S_n)}{(2n+1)^2}$$

Avec l'expression de $S_n$, majorant et minorant ont pour limite $\pi^2/6$. Par théorème d'encadrement, il en est de même pour le terme du milieu de notre double inégalité. La série proposée converge (ce que l'on sait car c'est une série de Riemann convergente) et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

## Partie I

1. $t \mapsto t^s \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$ et on a un unique pb au voisinage de 0. Or, $t^s \ln(t) = o(t^{\frac{s-1}{2}})$ (le quotient vaut $t^{\frac{s+1}{2}} \ln(t)$ qui est de limite nulle en 0 par croissances comparées car $s + 1 > 0$) et $\frac{s-1}{2} > -1$. On a donc intégrabilité au voisinage de 0 (comparaison aux fonctions de Riemann) et $J_s$ existe.
   Sous réserve d'existence, une intégration par parties donne

   $$J_s = \left[\frac{t^{s+1}}{s+1} \ln(t)\right]_0^1 - \frac{1}{s+1} \int_0^1 t^s \, dt$$

   Le terme tout intégré admet une limite en 0 (nulle par croissances comparées) et l'intégration par partie est licite. On termine le calcul avec

   $$J_s = -\frac{1}{(s+1)^2}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_x : t \mapsto \frac{t^x \ln(t)}{(t-1)}$ est continue sur $]0, 1[$, prolongeable par continuité en 1 par la valeur 1 (car $\ln(t) \sim_1 (t-1)$) et équivalente en 0 à $-t^x \ln(t)$. Si $x > 1$, $f_x$ est intégrable au voisinage de 0 (question précédente). Si $x \leq 1$, $tf_x(t) \to +\infty$ quand $t \to 0$ et $f_x$ n'est pas intégrale. Enfin, $f_x$ est positive et son intégrabilité équivaut à l'existence de son intégrale. Ainsi

   $$D_H = ]-1, +\infty[$$

   (b) Si $x \leq y$ alors pour tout $]0, 1[$, $t^x = \exp(x \ln(t)) \geq \exp(y \ln(t)) = t^y$ (car $\ln(t) \leq 0$). On multiplie par $\frac{\ln(t)}{t-1} \geq 0$ et on intégre sur $]0, 1[$ quand $x > -1$. On trouve que

   $$\forall -1 < x \leq y, \; H(x) \geq H(y)$$

   et $H$ est donc décroissante sur son domaine.

   (c) La fonction proposée est continue sur $]0, 1[$, de limite nulle en 1 (car $\ln(t) \sim_1 (t-1)$) et de limite nulle en 0 (par croissances comparées et car $\alpha > 0$). Ainsi, cette fonction est prolongeable en une fonction continue sur le SEGMENT $[0, 1]$ et donc bornée sur ce segment.

   (d) On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x > -1,\ t \mapsto \frac{t^x \ln(t)}{t-1}$ est intégrable sur $]0,1[$.
- $\forall t \in ]0,1[,\ x \mapsto \frac{t^x \ln(t)}{t-1}$ est de classe $C^1$ sur $]-1,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto \frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}$.
- $\forall x > -1,\ t \mapsto \frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$.
- $\forall x \in [a,b] \subset ]-1,+\infty[,\ \forall t \in ]0,1[,\ \left|\frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}\right| \leq \frac{t^a(\ln(t))^2}{1-t}$. Le majorant est continu sur $]0,1[$ et borné (question précédente) et donc intégrable sur le SEGMENT $[0,1]$.

Le théorème s'applique et indique que $H \in C^1(]-1,+\infty[)$ avec

$$\forall x > -1,\ H'(x) = \int_0^1 \frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}\ dt$$

La fonction intégrée étant négative $H'$ est négative sur $]-1,+\infty[$ et on retrouve la décroissance de $H$.

(e) Soit $x > 0$. La fonction $g\ :\ t \mapsto \frac{t\ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 0) et 1 (valeur 1). C'est donc une fonction bornée sur $]0,1[$. Une majoration grossière donne

$$\forall x > 0,\ |H(x)| \leq \|g\|_\infty \int_0^1 t^{x-1}\ dt = \frac{\|g\|_\infty}{x}$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0$$

et en particulier (caractérisation séquentielle) que $H(x_n) \to 0$ si $x_n \to 0$.
*Remarque : l'énoncé veut nous faire utiliser le théorème de convergence dominée pour étudier $(H(x_n))$ puis conclure pour la limite continue par caractérisation séquentielle. Ce que je fais me paraît plus simple.*

(f) On a

$$H(x) - H(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x(1-t)\ln(t)}{t-1}\ dt = -J_x = \frac{1}{(x+1)^2}$$

(g) $H$ étant continue en 0 (et même dérivable), $H(x+1) \to H(0)$ quand $x \to -1$ est négligeanle devant $1/(x+1)^2$ au voisinage de $-1$. Ainsi la question précédente donne

$$H(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \underset{x\to-1}{\sim} \frac{1}{(x+1)^2}$$

(h) i. On a $\frac{1}{(x+k)^2} \sim \frac{1}{k^2}$ qui est le terme d'une série positive convergente.

ii. On procède par récurrence.

- Initialisation : pour $n = 0$, l'égalité se lit $H(x) = H(x)$ et est vraie. Pour $n = 1$, on utilise 2.f.
- Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que le résultat est vrai au rang $n$. La question 2.f utilisée avec $x+n$ donne alors

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + \frac{1}{(x+n+1)^2} + H(x+n+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n+1) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat au rang $n+1$.

iii. Comme $H$ est de limite nulle en $+\infty$ et comme la série converge, on peut faire tendre $n$ vers $+\infty$ pour obtenir

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

iv. En particulier

$$H(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$H(1) = H(0) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

# Partie 2

1. $h_x \ : \ t \mapsto \frac{1}{(x+t)^2}$ décroît sur $]-x, +\infty[$ et donc sur $]1, +\infty[$. On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ h_x(k+1) \leq \int_k^{k+1} h_x(t)\, dt \leq h_x(k)$$

c'est à dire

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{(x+k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{(x+k)^2}$$

2. Sommons ces inégalités pour $k = 1, 2, \dots, n$ :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k+1)^2} \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{(x+t)^2} = \left[ -\frac{1}{t+x} \right]_{t=1}^{t=n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2}$$

Tous les termes admettent une limite quand $n \to +\infty$ et le passage à la limite donne

$$H(x) - \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{1+x} \leq H(x)$$

ou encore

$$\frac{1}{1+x} \leq H(x) \leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

Majorant et minorant possédant en $+\infty$ l'équivalent commun $1/x$, on en déduit que

$$H(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

3. (a) $H(n) \sim \frac{1}{n}$ est le termé général d'une série divergente positive.
$((-1)^n u_n)$ est une suite de limite nulle ($H$ est de limite nulle en $+\infty$), alternée ($H$ est positive) et décroissante en module ($H$ est décroissante). La règle spéciale indique que $\sum((-1)^n u_n)$ converge.

(b) Notons $f_n \ : \ t \mapsto (-1)^n \frac{t^n \ln(t)}{t-1}$.

- $\forall n, \ f_n \in C^0(]0, 1[)$.
- $\sum(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $]0, 1[$ et sa somme simple est $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ (on reconnaît en $\sum((-1)^n t^n)$ une série géométrique). Cette limite simple est continue sur $]0, 1[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in ]0, 1[$,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \right| = \left| \frac{(1 - (-t)^{n+1}) \ln(t)}{t^2 - 1} \right| \leq \frac{2|\ln(t)|}{1 - t^2}$$

Le majorant est continu sur $]0, 1[$, prolongeable par continuité en 1 (valeur 1) et $o(1/\sqrt{t})$ au voisinage de 0 (équivalent à $\ln(t)$). Il est donc intégrable sur $]0, 1[$.

Par théorème de convergence dominée, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 f_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$$

(c) $v \mapsto v^2$ étant de classe $C^1$ sur $]0,1[$ à dérivée qui ne s'annule pas, on peut effectuer le changement de variable $u = v^2$ pour obtenir

$$\int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2-1}\,dv = \int_0^1 \frac{\ln(\sqrt{u})}{u-1}\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{4}H(-1/2)$$

## Partie 3

1. (a) Sous réserve d'existence, une intégration par parties donne

$$I_{p,q} = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(\ln(t))^q\right]_0^1 - \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^p \ln(t)^{q-1}\,dt$$

Le terme tout intégré est de limite nulle en 0 (croissances comparées) et ceci légitime l'intégration par parties et donnc

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}I_{p,q-1}$$

(b) On prouve alors par récurrence (sur $q$) que

$$I_{p,q} = (-1)^q\frac{q!}{(p+1)^q}I_{p,0} = (-1)^q\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$$

2. (a) $t \mapsto \frac{(\ln(t))^{n+1}}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$, négligeable devant $1/\sqrt{t}$ au voisinage de 0 (croissances comparées) et prolongeable par continuité en 1 (valeur 1 si $n=0$ et 0 si $n \geq 1$). C'est donc une fonction intégrable sur $]0,1[$ et $B_n$ existe.

(b) On sait que

$$\forall t \in ]0,1[,\ \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k$$

Posons donc $g_k\ :\ t \mapsto \ln(t)^{n+1}t^k$ ($n$ est fixé).

- Les $g_k$ sont toutes continues sur $]0,1[$.
- $\sum(g_k)$ converge simplement sur $]0,1[$ et sa somme simple est $t \mapsto \frac{(\ln(t))^{n+1}}{t-1}$ qui est continue sur $]0,1[$.
- $\int_0^1 |g_k| = (-1)^{n+1}\int_0^1 g_k = (-1)^{n+1}I_{k,n+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)^{n+2}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente car $n+2 \geq 2 > 1$.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne

$$B_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 g_k = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{k,n+1}$$

(c) Avec la question 1, on en déduit (avec changement d'indice) que

$$B_n = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)^{n+2}} = (-1)^{n+1}(n+1)!Z_{n+2}$$

3. Avec le DSE de l'exponentielle, on a

$$\forall x > -1,\ H(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(t))^{k+1}}{t-1} \frac{x^k}{k!}\, dt$$

Fixons $x \in ]-1,1[$ et notons $h_k\ :\ t \mapsto \frac{(\ln(t))^{k+1}}{t-1} \frac{x^k}{k!}$.

- Les $h_k$ sont continues sur $]0,1[$.
- $\sum(h_k)$ converge simplement sur $]0,1[$ et sa somme est $t \mapsto \frac{t^x \ln(t)}{t-1}$ qui est continue sur $]0,1[$.
- On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in ]0,1[,\ \left|\sum_{k=0}^{n} h_k(t)\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h_k(t)| = \frac{t^{-|x|} |\ln(t)|}{|t-1|}$$

Comme $|x| < 1$, $-|x| > -1$ et le majorant est intégrable sur $]0,1[$.

On peut appliquer le théorème de convergence dominée pour intervertir somme et intégrale et conclure que

$$\forall x \in ]-1,1[,\ H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (k+1) Z_{k+2} x^k$$

4. Le rayon de convergence est au moins égal à 1 (l'égalité étant valable sur $]-1,1[$). Si, par l'absurde, il était $> 1$, la somme de la série entière serait continue en $-1$ et $H$ admettrait une limite finie en $-1$ ce qui est faux. Le rayon de convergence vaut donc 1.