

CENTRALE - SUPÉLEC 2011

PSI, épreuve MATH 2

Représentation connaissant les distances mutuelles

I. Centrage de matrices

I.A. On a $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, et $J^2 = nJ$, on en déduit que

$$P^2 = \left(I_n - \frac{1}{n}J\right)^2 = I_n - \frac{2}{n}J + \frac{1}{n^2}J^2 = I_n - \frac{1}{n}J = P,$$

donc π est un projecteur. Il est autoadjoint (car représenté par une matrice symétrique dans une base orthonormale), c'est donc un projecteur orthogonal. On a $PX = X \iff JX = 0$, donc $\text{Im } \pi = \text{Ker } J$ est l'hyperplan $\mathcal{H}$ d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$, et $\text{Ker } \pi = \mathcal{H}^\perp = \text{Vect}(Z)$.

Rappel: Un projecteur d'un espace euclidien est un projecteur orthogonal si et seulement s'il est autoadjoint.

I.B.1) • Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\Phi^2(M) = P^2MP^2 = PMP = \Phi(M)$, donc $\Phi^2 = \Phi$: l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un projecteur.

• Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$(\Phi(M)|N) = (PMP|N) = \text{tr}({}^tPMPN) = \text{tr}(P {}^tMPN) = \text{tr}({}^tMPN P) = (M|PNP) = (M|\Phi(N)),$$

donc Φ est un endomorphisme symétrique (autoadjoint) de l'espace euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc Φ est un projecteur orthogonal.

I.B.2) • Si $M \in \text{Im } \Phi$, alors $M = \Phi(M) = PMP$ (l'image d'un projecteur est aussi l'ensemble de ses vecteurs invariants), donc $MZ = PMPZ = 0$ puisque $Z \in \text{Ker } P = \text{Ker } \pi$. De même, ${}^tMZ = P {}^tMPZ = 0$. On a donc l'inclusion

$$\text{Im } \Phi \subset \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MZ = {}^tMZ = 0\}.$$

• Inversement, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $MZ = {}^tMZ = 0$.

Alors $\text{Im}(P - I) = \text{Ker } P = \text{Vect}(Z) \subset \text{Ker } M$ par hypothèse, donc $M(P - I) = 0$, soit $MP = M$.

On a aussi $\text{Im}(P - I) = \text{Vect}(Z) \subset \text{Ker } {}^tM$, donc ${}^tMP = {}^tM$ et, en transposant, $PM = M$.

Des deux identités ci-dessus, on tire $PMP = M$, autrement dit $\Phi(M) = M$ donc $M \in \text{Im } \Phi$, ce qui prouve l'inclusion inverse.

• Approfondissons un peu l'étude de Φ , cela me sera utile pour la suite : on vient de montrer que $\text{Im } \Phi$ est constitué des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont telles que, sur chaque ligne et sur chaque colonne, la somme des coefficients est nulle, autrement dit

$$\text{Im } \Phi = \left(\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } l_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^n \text{Ker } c_j\right),$$

en notant l_i la forme linéaire $M \mapsto \sum_{j=1}^n m_{ij}$ (somme des coefficients de la i -ème ligne) et

$c_j : M \mapsto \sum_{i=1}^n m_{ij}$ (somme des coefficients de la j -ème colonne). Les formes linéaires ci-

dessus sont liées par la relation évidente $\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{j=1}^n c_j$ ($\mapsto$ somme de tous les coefficients

de la matrice), mais on vérifie facilement que la famille $(l_1, \dots, l_n, c_1, \dots, c_{n-1})$ est libre, on en déduit que

$$\text{rg } \Phi = \dim \text{Im } \Phi = n^2 - \text{rg}(l_1, \dots, l_n, c_1, \dots, c_n) = n^2 - (2n - 1) = (n - 1)^2.$$

Donc $\text{Ker } \Phi$ est de dimension $2n-1$, on peut vérifier que $\text{Ker } \Phi = \text{Vect}(L_1, \dots, L_n, C_1, \dots, C_{n-1})$ avec

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad L_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

et je laisse le lecteur imaginer des matrices C_j analogues avec une colonne de 1 et les autres de 0. *Pour justifier cela, on peut, soit vérifier que ces matrices sont linéairement indépendantes et que chacune d'elles vérifie $PMP = 0$ et conclure par un argument de dimension, soit utiliser $\text{Ker } \Phi = (\text{Im } \Phi)^\perp$ puisqu'il est immédiat que $\text{Vect}(L_i) = (\text{Ker } l_i)^\perp$ et $\text{Vect}(C_j) = (\text{Ker } c_j)^\perp$.*

I.C. On a $\Phi(M) = PMP = M - \frac{1}{n}(MJ + JM) + \frac{1}{n^2}JMJ$. Or, $MJ = MZ^tZ = S(M)^tZ$, donc, les deux matrices étant symétriques, $JM = {}^t(MJ) = Z^tS(M)$, puis $JMJ = Z^tZMZ^tZ = ({}^tZMZ)Z^tZ$ (on peut ainsi permuter car tZMZ est un scalaire) ; plus précisément, ${}^tZMZ = \langle Z, MZ \rangle = \sigma(M)$. Au final, on obtient bien la relation

$$\Phi(M) = M - \frac{1}{n}(S(M)^tZ + Z^tS(M)) + \frac{\sigma(M)}{n^2}J.$$

II. Produit scalaire à partir des distances mutuelles (relation de Torgerson)

II.A. La matrice M étant symétrique, on peut calculer $\Phi(M)$ à l'aide de la relation obtenue en **I.C.** Notons que

$$S(M)^tZ = \begin{pmatrix} S(M)_1 \\ \vdots \\ S(M)_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(M)_1 & \dots & S(M)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ S(M)_n & \dots & S(M)_n \end{pmatrix},$$

autrement dit $(S(M)^tZ)_{i,j} = S(M)_i$. De même, $(Z^tS(M))_{i,j} = S(M)_j$. Précisons :

$$\begin{aligned} S(M)_i &= \sum_{j=1}^n m_{ij} = \sum_{j=1}^n (\|U_i\|^2 + \|U_j\|^2 - 2\langle U_i, U_j \rangle) \\ &= n\|U_i\|^2 + \sum_{k=1}^n \|U_k\|^2 - 2\left\langle U_i, \sum_{j=1}^n U_j \right\rangle \\ &= n\|U_i\|^2 + \sum_{k=1}^n \|U_k\|^2, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que les U_i sont centrés. On en déduit que

$$\sigma(M) = \sum_{i=1}^n S(M)_i = 2n \sum_{k=1}^n \|U_k\|^2.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} (\Phi(M))_{i,j} &= m_{ij} - \frac{1}{n} (S(M)_i + S(M)_j) + \frac{\sigma(M)}{n^2} & (*) \\ &= m_{ij} - \|U_i\|^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|U_k\|^2 - \|U_j\|^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|U_k\|^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \|U_k\|^2 \\ &= \|U_i - U_j\|^2 - \|U_i\|^2 - \|U_j\|^2 \\ &= -2 \langle U_i, U_j \rangle. \end{aligned}$$

Or, si on pose $U_j = \sum_{k=1}^p u_{kj} e_k$ avec $(e_1, \dots, e_p)$ base canonique de $\mathbb{R}^p$ (les u_{ij} sont les coefficients de la matrice $U \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$), on a

$$({}^t U U)_{i,j} = \sum_{k=1}^p u_{ki} u_{kj} = \langle U_i, U_j \rangle.$$

On a donc prouvé la relation $\Phi(M) = -2 {}^t U U$.

II.B. Il suffit de relire la question précédente (relation $(*)$), on obtient les coefficients de la matrice “de Gram”

$$\langle U_i, U_j \rangle = {}^t U_i U_j = ({}^t U U)_{i,j} = -\frac{1}{2} (\Phi(M))_{i,j} = -\frac{1}{2} (m_{ij} + \alpha_{ij}).$$

III. Condition pour qu’une matrice de Gram soit une matrice de distances mutuelles au carré

III.A.1) • Pour toute matrice M symétrique, $\Phi(M) = P M P$ est aussi symétrique réelle, donc ses valeurs propres sont toutes réelles.

• Supposons d’abord les U_i centrés, i.e. $\sum_{i=1}^n U_i = 0$; dans ce cas, on a $\Phi(M) = -2 {}^t U U$ d’après **II.A.**, donc si λ est une valeur propre de $\Phi(M)$ et $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé, on a $-2 {}^t U U X = \lambda X$, puis $-2 {}^t X {}^t U U X = \lambda {}^t X X$, soit $\lambda = -2 \frac{\|U X\|^2}{\|X\|^2} \leq 0$.

• Si les U_i sont quelconques, soit $G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i$ leur isobarycentre, posons $V_i = U_i - G$ pour

tout i , alors les V_i sont centrés : $\sum_{i=1}^n V_i = 0$. Comme on a $m_{ij} = \|U_i - U_j\|^2 = \|V_i - V_j\|^2$,

la question **II.A.** montre que $\Phi(M) = -2 {}^t V V$, avec $V = (V_1 | V_2 | \dots | V_n) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, et on retrouve comme ci-dessus que ses valeurs propres sont négatives ou nulles.

III.A.2) On a $\text{rg}(\Phi(M)) = \text{rg}({}^tUU) = \text{rg}(U)$, c'est classique : en effet, en identifiant matrices et applications linéaires canoniquement associées, on a $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, ${}^tUU \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et ces deux applications linéaires ont le même noyau puisque $\text{Ker } U \subset \text{Ker}({}^tUU)$ de façon évidente et ${}^tUUX = 0 \implies \|UX\|^2 = {}^tX{}^tUUX = 0$, elles ont donc le même rang par le théorème du rang. Comme $U \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on a $\text{rg}(U) \leq \min\{n, p\}$, donc $p \geq \text{rg}(\Phi(M))$.

III.B.1) Je vais utiliser l'indication donnée... à la question **V.A.2.b)**!!!

La matrice $\Psi(M)$ est symétrique réelle, à valeurs propres positives ou nulles. D'après le théorème spectral, on peut écrire $\Psi(M) = QD{}^tQ$, avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, les λ_i étant les valeurs propres strictement positives (comptées avec leur multiplicité) de $\Psi(M)$. En posant $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, on a $D = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^tEE$, avec $E = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$. En posant enfin $U = E{}^tQ$, on a $U \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$, et $\Psi(M) = {}^tUU$.

III.B.2.a) Il s'agit de montrer que $UZ = 0$, soit encore que $\|UZ\|^2 = 0$, c'est-à-dire que ${}^tZ{}^tUZZ = 0$. Or,

$${}^tZ{}^tUZZ = -\frac{1}{2} {}^tZ \Phi(M) Z = -\frac{1}{2} {}^tZ P M P Z = 0$$

puisque $Z \in \text{Ker } P$. Donc les U_i sont centrés.

b) D'après **II.A.**, on a ${}^tUU = \Psi(N)$, donc $\Psi(N) = \Psi(M)$.

c) On vient de montrer que $N - M \in \text{Ker } \Psi = \text{Ker } \Phi$ donc, d'après les remarques faites à la fin de la question **I.B.2)**, on a $N - M \in \text{Vect}(L_1, \dots, L_n, C_1, \dots, C_{n-1})$, autrement dit la matrice $N - M$ est de la forme

$$N - M = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_{n-1} & a_1 \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_{n-1} & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Mais la matrice $N - M$ est aussi symétrique, à coefficients diagonaux nuls, on en déduit facilement (*détails laissés au lecteur*) qu'elle est nulle. Donc $M = N$.

En conclusion, les "matrices de distances mutuelles au carré" sont exactement les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont symétriques, à coefficients diagonaux nuls, et telles que les valeurs propres de $\Phi(M)$ sont négatives ou nulles. *Il faut croire que cela entraîne la positivité des coefficients de M , puisque cette condition n'a pas été utilisée pour traiter la réciproque.*

IV. Étude d'un exemple dans l'espace $\mathbb{R}^3$

IV.A. Étude géométrique

Notons d'abord que les conditions $AB = BC = CD = DA = x$ entraînent l'orthogonalité des diagonales, soit $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$. En effet, en utilisant l'identité de polarisation

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

pour exprimer les produits scalaires, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD} \\
&= \frac{1}{2} (AD^2 - AB^2 - BD^2) - \frac{1}{2} (CD^2 - CB^2 - BD^2) \\
&= \frac{1}{2} (x^2 - x^2 - BD^2) - \frac{1}{2} (x^2 - x^2 - BD^2) = 0.
\end{aligned}$$

IV.A.1) Si A, B, C, D sont coplanaires, alors le quadrilatère $ABCD$ est un losange, ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent perpendiculairement (cf. ci-dessus) et en leur milieu commun I (car c'est un parallélogramme particulier, ou bien cela peut être vu comme conséquence de la question **IV.A.2.a** qui suit). De Pythagore dans le triangle rectangle AIB par exemple, on déduit la relation $1 = AB^2 = AI^2 + IB^2$, soit $a^2 + b^2 = 4$.

IV.A.2.a) La droite (IJ) coupe (AB) en I et (CD) en J , et

$$\begin{aligned}
2 \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} \\
&= -\frac{1}{2} (BC^2 - BA^2 - AC^2) + \frac{1}{2} (AD^2 - AC^2 - CD^2) = 0,
\end{aligned}$$

donc (IJ) est la perpendiculaire commune aux deux droites non coplanaires (AC) et (BD) .

b) Notons B' et D' les projetés orthogonaux de B et D respectivement sur le plan affine $\mathcal{P}$ contenant (AC) et parallèle à (BD) , c'est-à-dire perpendiculaire à (IJ) . *Faire un dessin!* La droite $(B'D')$, parallèle à (BD) dans le plan $\mathcal{P}$, est donc perpendiculaire à (AC) : le quadrilatère plan $AB'CD'$ est un losange dans le plan $\mathcal{P}$ puisque ses diagonales $[AC]$ et $[B'D']$ se coupent perpendiculairement en leur milieu I (projeté de J), notons l la longueur commune de ses côtés. Alors $l < 1$ puisque $1 = AB^2 = l^2 + BB'^2 > l^2$ (Pythagore). De nouveau par Pythagore, on a $IA^2 + IB'^2 = AB'^2$, soit $\frac{a^2 + b^2}{4} = l^2 < 1$, donc $a^2 + b^2 < 4$.

IV.A.3) Pour construire géométriquement un quadrilatère gauche satisfaisant aux conditions de distances mutuelles imposées, on "remonte" le raisonnement ci-dessus, i.e. on construit d'abord dans l'espace $\mathbb{R}^3$ deux segments $[AC]$ et $[B'D']$ se coupant perpendiculairement en leur milieu commun I et de longueurs respectives a et b , alors $AB'CD'$ est un losange dans un certain plan affine $\mathcal{P}$. Notons l la longueur commune des côtés, par Pythagore on a $a^2 + b^2 = 4l^2$, donc $0 < l \leq 1$ vu l'hypothèse $a^2 + b^2 \leq 4$. On place ensuite un point B sur la normale à $\mathcal{P}$ issue de B' de façon que $BB' = \sqrt{1 - l^2}$, et un point D défini par $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BB'}$. On a alors $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$, donc $BD = b$. On a bien $AC = a$ et, par Pythagore de nouveau $AB^2 = AB'^2 + B'B^2 = l^2 + (1 - l^2) = 1$ et, de même, $BC = CD = DA = 1$.

IV.B. Étude algébrique

IV.B.1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b^2 \\ a^2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & b^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $S(M) = \begin{pmatrix} a^2 + 2 \\ b^2 + 2 \\ a^2 + 2 \\ b^2 + 2 \end{pmatrix}$ et $\sigma(M) = 2a^2 + 2b^2 + 8$.

IV.B.2) On calcule!!!

$$\Psi(M) = -\frac{1}{2}\Phi(M) = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 + 3a^2 - b^2 & -4 + a^2 + b^2 & 4 - 5a^2 - b^2 & -4 + a^2 + b^2 \\ -4 + a^2 + b^2 & 4 - a^2 + 3b^2 & -4 + a^2 + b^2 & 4 - a^2 - 5b^2 \\ 4 - 5a^2 - b^2 & -4 + a^2 + b^2 & 4 + 3a^2 - b^2 & -4 + a^2 + b^2 \\ -4 + a^2 + b^2 & 4 - a^2 - 5b^2 & -4 + a^2 + b^2 & 4 - a^2 + 3b^2 \end{pmatrix}.$$

En posant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, le lecteur se fera un plaisir de vérifier les égalités

$$\Psi(M) X = \frac{a^2}{2} X \quad ; \quad \Psi(M) Y = \frac{b^2}{2} Y \quad ; \quad \Psi(M) W = \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{4}\right) W \quad ; \quad \Psi(M) Z = 0$$

(la dernière de ces relations étant déjà connue puisqu'on sait que toute matrice appartenant à $\text{Im } \Psi = \text{Im } \Phi$ possède le vecteur Z dans son noyau). Ces quatre vecteurs, qui sont linéairement indépendants car deux à deux orthogonaux, forment donc une base (orthogonale) de vecteurs propres de la matrice $\Psi(M)$, et

$$\text{Sp}(\Psi(M)) = \left\{ \frac{a^2}{2}, \frac{b^2}{2}, 1 - \frac{a^2 + b^2}{4}, 0 \right\}$$

(les quatre valeurs n'étant pas nécessairement distinctes).

IV.B.3) Comme $a > 0$ et $b > 0$, on a $\text{rg}(\Psi(M)) = \begin{cases} 2 & \text{si } a^2 + b^2 = 4 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$.

IV.B.4) Si les points sont coplanaires, on peut toujours les supposer centrés, alors $\text{rg}(\Psi(M)) = \text{rg}({}^t U U) = \text{rg}(U) = 2$, donc $a^2 + b^2 = 4$.

IV.B.5) D'après la partie **III**, les valeurs propres de la matrice $\Psi(M)$ sont positives ou nulles, ce qui entraîne $a^2 + b^2 \leq 4$.

IV.B.6) Reprenons la construction de U décrite à la question **III.B.1)**. On a $\Psi(M) = Q D {}^t Q$, avec une matrice de passage Q orthogonale que l'on obtient en normant les vecteurs-colonnes X, Y, W, Z , soit

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4 - a^2 - b^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $r = \sqrt{4 - a^2 - b^2}$ puis $\Delta = \text{diag}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{r}{2}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $U = (\Delta \ 0) {}^t Q = (U_1 | U_2 | U_3 | U_4) \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ nous fournit quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions recherchées. On explicite :

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ -\frac{r}{4} \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{2} \\ \frac{r}{4} \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \\ -\frac{r}{4} \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b}{2} \\ \frac{r}{4} \end{pmatrix}.$$

V. Cas où il n'existe pas de points représentant une matrice de distances mutuelles

V.A. Par les moindres carrés

V.A.1.a) On a

$$\begin{aligned}\|{}^tQAQ\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}^2 &= \text{tr}({}^tQ{}^tAQ{}^tQAQ) = \text{tr}({}^tQ{}^tAAQ) \\ &= \text{tr}({}^tAAQ{}^tQ) = \text{tr}({}^tAA) = \|A\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}^2.\end{aligned}$$

- b) La matrice $\Psi(M)$ est symétrique réelle lorsque M est symétrique ; d'après le théorème spectral, il existe donc $Q_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQ_0 \Psi(M) Q_0$ soit diagonale.
- c) Posons $D = {}^tQ_0 \Psi(M) Q_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors pour tout $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|\Psi(M) - T\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \|Q_0 D {}^tQ_0 - T\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \|D - {}^tQ_0 T Q_0\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

et, lorsque T décrit $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, ${}^tQ_0 T Q_0$ décrit aussi $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On est donc ramené à montrer que, si $S_0 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifie $\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \|D - S\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \geq \|D - S_0\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, alors S_0 est nécessairement diagonale. Pour cela, supposons $S_0 = (s_{ij})$ non diagonale, et introduisons la matrice diagonale $S = \text{diag}(s_{11}, \dots, s_{nn})$, on a alors $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ car $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad s_{ii} = {}^tE_i S E_i \geq 0$ (il est classique qu'une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a toutes ses valeurs propres positives ou nulles si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R} \quad {}^tX S X \geq 0$), et

$$\|D - S\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - s_{ii})^2 < \sum_{i=1}^n (\lambda_i - s_{ii})^2 + \sum_{i \neq j} s_{ij}^2 = \|D - S_0\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}^2,$$

ce qui est une contradiction.

- d) Posons toujours $\Psi(M) = Q_0 D {}^tQ_0$, avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. La question c) nous ramène à chercher la matrice diagonale $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ "la plus proche" de D avec des δ_i tous positifs ou nuls. Comme $\|D - \Delta\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \delta_i)^2$, la seule solution est de prendre

$$\delta_i = \lambda_i^+ = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } \lambda_i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ La matrice } T_0 \text{ recherchée est alors } T_0 = Q_0 \Delta {}^tQ_0.$$

Remarque. Par construction, cette matrice T_0 est diagonalisable, ses valeurs propres strictement positives sont celles de $\Psi(M)$ avec les mêmes sous-espaces propres, et son noyau est la somme des sous-espaces propres de $\Psi(M)$ associés aux valeurs propres négatives ou nulles. En particulier, $\text{Ker}(\Psi(M)) \subset \text{Ker } T_0$.

- V.A.2.a) S'il existe n vecteurs de $\mathbb{R}^p$, centrés, tels que $\Psi(\tilde{M}) = T_0$, alors $p \geq \text{rg}(\Psi(\tilde{M})) = \text{rg}(T_0)$ d'après III.A.2. La matrice T_0 n'est pas nulle par hypothèse et, comme $\Psi(M)$ a au moins une valeur propre strictement négative, $\text{Ker } T_0 \neq \{0\}$ (cf. remarque ci-dessus), donc $\text{rg}(T_0) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. En fait, on a $\text{rg}(T_0) \leq n-2$ puisqu'on a aussi $Z \in \text{Ker } \Psi(M) \subset \text{Ker } T_0$.
- b) Soit $r = \text{rg}(T_0)$. Comme $T_0 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a $T_0 = Q_0 D {}^tQ_0$, avec $Q_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les λ_i étant les valeurs propres strictement positives de T_0 . En posant $\Delta_1 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, la matrice $U = (\Delta_1 \quad 0) {}^tQ_0$ de $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ vérifie

$${}^tUU = Q_0 \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ 0 \end{pmatrix} (\Delta_1 \quad 0) {}^tQ_0 = Q_0 D {}^tQ_0 = T_0 .$$

c) On a déjà remarqué en a) que $Z \in \text{Ker } T_0$, donc ${}^tUUZ = 0$, puis ${}^tZ{}^tUUZ = 0$, soit $\|UZ\|^2 = 0$, donc $UZ = 0$, ce qui donne la relation $\sum_{i=1}^n U_i = 0$.

d) En posant $\tilde{M} = (\|U_i - U_j\|^2)$, les U_i étant centrés, on a $\Psi(\tilde{M}) = {}^tUU$ d'après **II.A.**, donc $\Psi(\tilde{M}) = T_0$.

Ainsi, avec $p = r = \text{rg}(T_0)$ = nombre de valeurs propres strictement positives de $\Psi(M)$, on a montré l'existence de n vecteurs $U_1, \dots, U_n$ de $\mathbb{R}^p$, centrés, tels que $T_0 = \Psi(\tilde{M})$. C'est la valeur minimale de p pour laquelle cette construction est possible.

V.B. Par décalage de la distance au carré

V.B.1. Soit $X \in \mathcal{H}$, alors de ${}^tP = P$ et $PZ = 0$, on déduit

$$\langle \Psi(A) X, Z \rangle = -\frac{1}{2} \langle PAPX, Z \rangle = -\frac{1}{2} \langle APX, PZ \rangle = 0 ,$$

donc $\Psi(A) X \in \mathcal{H}$: l'hyperplan $\mathcal{H}$ est stable par $\Psi(A)$.

V.B.2. On a $(\xi_i^j) = J - I_n$, puis $N_k = M + k(J - I_n)$.

V.B.3. La matrice $\Psi(N_k)$ est symétrique, et $\Psi(N_k) = \Psi(M) + k \Psi(J) - k \Psi(I_n)$. Or, $\Psi(J) = -\frac{1}{2}PJP = -\frac{1}{2}PZ{}^tZP = 0$ et $\Psi(I_n) = -\frac{1}{2}P^2 = -\frac{1}{2}P$, ce qui donne

$$\Psi(N_k) = \Psi(M) - \frac{k}{2n} J + \frac{k}{2} I_n .$$

La matrice $\Psi(M)$ admet une base orthonormale de vecteurs propres de la forme $(Z, E_2, \dots, E_n)$; le vecteur Z est vecteur propre de $\Psi(M)$ et de $\Psi(N_k)$ pour la valeur propre 0, et pour i de 2 à n , le vecteur E_i est dans $\mathcal{H}$ donc $JE_i = 0$ et, si $\Psi(M) E_i = \lambda_i E_i$, alors $\Psi(N_k) E_i = \left(\lambda_i + \frac{k}{2}\right) E_i$.

Les valeurs propres de $\Psi(N_k)$ sont donc 0, et les $\lambda_i + \frac{k}{2}$, où les λ_i sont les valeurs propres non nulles (sauf si 0 est valeur propre multiple) de $\Psi(M)$. Donc $\Psi(N_k)$ est à valeurs propres positives ou nulles si et seulement si $k \geq -2 \min (\text{Sp}(\Psi(M)))$.

On a donc $k_0 = -2 \min (\text{Sp}(\Psi(M)))$.

V.C. Par décalage de la distance

V.C.1) On a $(M_c)_{i,j} = m_{ij} + 2c \xi_i^j d_{ij} + c^2 \xi_i^j = m_{ij} + 2c d_{ij} + c^2 \xi_i^j$ puisque d_{ij} est nul si $i = j$.

Donc $M_c = M + 2c D + c^2(J - I_n)$ et, puisque $\Psi(J) = 0$ et $\Psi(I_n) = -\frac{1}{2}P$ (cf. **V.B.3**) ci-dessus), on obtient

$$\Psi(M_c) = \Psi(M) + 2c \Psi(D) + \frac{c^2}{2} P ,$$

puis

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad {}^tX \Psi(M_c) X = {}^tX \Psi(M) X + 2c {}^tX \Psi(D) X + \frac{c^2}{2} {}^tX P X .$$

V.C.2) Les matrices $\Psi(M)$ et $\Psi(D)$ sont symétriques réelles, donc diagonalisables dans une b.o.n. Si on note $(V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de $\Psi(M)$, et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres associées, si un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ se décompose en $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i$, alors un calcul classique donne

$$\lambda_{\min} {}^tX X = \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq {}^tX \Psi(M) X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_{\max} {}^tX X ,$$

et des inégalités analogues pour $\Psi(D)$.

V.C.3) • Par hypothèse, $\lambda_{\min} < 0$, donc $4\mu_{\min}^2 - 2\lambda_{\min} > 0$, d'où l'existence de $\tilde{c}$, puis $\sqrt{4\mu_{\min}^2 - 2\lambda_{\min}} > 2|\mu_{\min}| \geq 2\mu_{\min}$, donc $\tilde{c} > 0$. Remarquons tout de suite que $\tilde{c}$ est la plus grande racine du trinôme $c \mapsto \frac{1}{2}c^2 + 2\mu_{\min}c + \lambda_{\min}$, ce trinôme ayant deux racines réelles distinctes.

• Prenons $c = \tilde{c}$: alors, si X est vecteur propre de $\Psi(M_c)$ pour une valeur propre λ non nulle, on a $X \in \mathcal{H}$ (en effet, Z est vecteur propre de $\Psi(M_c)$ pour la valeur propre 0 et les sous-espaces propres de $\Psi(M_c)$ sont deux à deux orthogonaux), donc $PX = X$, puis

$$\lambda {}^tX X = {}^tX \Psi(M_c) X \geq (\lambda_{\min} + 2\tilde{c}\mu_{\min} + \frac{1}{2}\tilde{c}^2) {}^tX X ,$$

et le terme entre parenthèses est nul d'après la remarque ci-dessus. On en déduit que $\lambda \geq 0$.

• Si $c > \tilde{c}$, si $X \in \mathcal{H}$ est non nul, alors

$${}^tX \Psi(M_c) X \geq (\lambda_{\min} + 2c\mu_{\min} + \frac{1}{2}c^2) {}^tX X ,$$

et le terme entre parenthèses est strictement positif d'après l'étude du trinôme faite ci-dessus, donc ${}^tX \Psi(M_c) X > 0$.

V.C.4) • D'abord, $\mathcal{A}$ est non vide : tout vecteur propre unitaire de $\Psi(M)$ associé à une valeur propre strictement négative (il en existe) est dans $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est borné car inclus dans la sphère unité (les éléments de $\mathcal{A}$ sont de norme 1), il est fermé car intersection de l'hyperplan $\mathcal{H}$ (fermé) et de l'image réciproque du fermé $\mathbb{R}_+$ par l'application continue $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto 4({}^tX \Psi(D) X)^2 - 2{}^tX \Psi(M) X$. Donc $\mathcal{A}$ est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. L'application α est continue sur le compact non vide $\mathcal{A}$ (car composée d'applications polynomiales en les coordonnées du vecteur X et de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$), donc elle atteint sur $\mathcal{A}$ un maximum $\alpha^* = \alpha(X^*) = \max_{X \in \mathcal{A}} \alpha(X)$.

• Pour $X \in \mathcal{A}$, le trinôme $c \mapsto \frac{c^2}{2} + 2({}^tX \Psi(D) X)c + {}^tX \Psi(M) X$ a deux racines réelles ou une double, et le réel $\alpha(X)$ est sa plus grande racine. Or, le produit des racines vaut $2 {}^tX \Psi(M) X$, donc si X_0 est un vecteur propre unitaire associé à une valeur propre strictement négative de $\Psi(M)$, alors $X_0 \in \mathcal{A}$ et ce produit est strictement négatif, donc la plus grande racine $\alpha(X_0)$ est strictement positive. On a a fortiori $\alpha^* \geq \alpha(X_0) > 0$.

V.C.5) • Comme $X^* \in \mathcal{A}$, on a $X^* \in \mathcal{H}$ et ${}^tX^* P X^* = {}^tX^* X^* = \|X^*\|^2 = 1$, donc

$${}^tX^* \Psi(M_{\alpha^*}) X^* = {}^tX^* \Psi(M) X^* + 2\alpha^* {}^tX^* \Psi(D) X^* + \frac{(\alpha^*)^2}{2}$$

et ceci vaut 0 car on a vu que $\alpha^* = \alpha(X^*)$ est racine du trinôme

$$c \mapsto \frac{c^2}{2} + 2 ({}^tX^* \Psi(D) X^*) c + {}^tX^* \Psi(M) X^* .$$

• La matrice $\Psi(M_{\alpha^*})$ est diagonalisable dans une base orthonormale de la forme $(Z, E_2, \dots, E_n)$, notons $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Les E_k ($2 \leq k \leq n$) sont unitaires et dans $\mathcal{H}$, donc :

- si $E_k \notin \mathcal{A}$, le trinôme $c \mapsto \frac{c^2}{2} + 2 ({}^tE_k \Psi(D) E_k) c + {}^tE_k \Psi(M) E_k$ n'a pas de racine réelle et ne prend donc que des valeurs strictement positives, en particulier pour $c = \alpha^*$, donc

$$\lambda_k = {}^tE_k \Psi(M_{\alpha^*}) E_k = {}^tE_k \Psi(M) E_k + 2\alpha^* {}^tE_k \Psi(D) E_k + \frac{(\alpha^*)^2}{2} > 0 .$$

- si $E_k \in \mathcal{A}$, le même trinôme admet $\alpha(E_k)$ comme plus grande racine, donc prend des valeurs positives ou nulles sur $[\alpha(E_k), +\infty[$ et, comme $\alpha^* \geq \alpha(E_k)$, on a $\lambda_k \geq 0$.

En conclusion, $\text{Sp}(\Psi(M_{\alpha^*})) \subset \mathbb{R}_+$.

• Si $c > \alpha^*$ et si $X \in \mathcal{H}$ est unitaire, alors

$${}^tX \Psi(M_c) X = {}^tX \Psi(M) X + 2c {}^tX \Psi(D) X + \frac{c^2}{2}$$

est strictement positif (dissocier les cas $X \notin \mathcal{A}$ et $X \in \mathcal{A}$ comme ci-dessus). Par homogénéité, cela reste vrai si X est quelconque non nul.

• Le réel α^* est strictement positif et vérifie les conditions :

▷ $\Psi(M_{\alpha^*})$ est à valeurs propres positives ou nulles ;

▷ $\forall c > \alpha^* \quad \forall X \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \quad {}^tX \Psi(M_c) X > 0$.

Si un réel c strictement inférieur à α^* vérifiait ces conditions, on aurait ${}^tX^* \Psi(M_{\alpha^*}) X^* > 0$, ce qui n'est pas le cas. Donc α^* est le plus petit réel vérifiant ces conditions, ce qui correspond à la définition de c^* . Donc $c^* = \alpha^*$.

V.C.6.a) La matrice $\Psi(M_{c^*})$ est symétrique positive, soit $(V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées, décomposons $X^* = \sum_{i=1}^n x_i V_i$.

Alors ${}^tX^* \Psi(M_{c^*}) X^* = 0$ d'après **V.C.5.**, soit $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = 0$, mais tous les termes étant positifs, ils sont tous nuls, ce qui entraîne $\forall i \quad \lambda_i x_i = 0$, soit $\Psi(M_{c^*}) X^* = 0$.

b) Calculons

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\Psi(M) \\ -I_n & -4\Psi(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^* \\ X^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Psi(M) X^* \\ -Y^* - 4\Psi(D) X^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^* Y^* \\ V \end{pmatrix} ,$$

avec $V = -\frac{2}{c^*} \Psi(M) X^* - 4\Psi(D) X^* = -\frac{2}{c^*} \left(-\frac{(c^*)^2}{2} X^* \right)$, en utilisant la relation

$$\Psi(M_{c^*}) X^* = \Psi(M) X^* + 2c^* \Psi(D) X^* + \frac{(c^*)^2}{2} X^* = 0 .$$

Finalement, $V = c^* X^*$, et le vecteur $\begin{pmatrix} Y^* \\ X^* \end{pmatrix}$ est bien vecteur propre de la matrice $B := \begin{pmatrix} 0 & 2\Psi(M) \\ -I_n & -4\Psi(D) \end{pmatrix}$, pour la valeur propre c^* .

V.C.7.a) Par hypothèse, on a $\begin{cases} 2\Psi(M) X_2 = \gamma X_1 & \text{(1)} \\ -X_1 - 4\Psi(D) X_2 = \gamma X_2 & \text{(2)} \end{cases}$. De **(2)**, on déduit que

$X_2 \neq 0$, sinon $X_1 = 0$ aussi et $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ n'est pas vecteur propre.

Si $\gamma = 0$, alors $\gamma \leq c^*$.

Si $\gamma \neq 0$, alors **(1)** donne $X_1 \in \mathcal{H}$, puis **(2)** donne $X_2 \in \mathcal{H}$, mais alors

$$\begin{aligned} \Psi(M_\gamma) X_2 &= \Psi(M) X_2 + 2\gamma \Psi(D) X_2 + \frac{\gamma^2}{2} P X_2 \\ &= \frac{\gamma}{2} X_1 + 2\gamma \left(-\frac{1}{4} X_1 - \frac{\gamma}{4} X_2 \right) + \frac{\gamma^2}{2} X_2 \\ &= 0 , \end{aligned}$$

donc ${}^t X_2 \Psi(M_\gamma) X_2 = 0$ et, comme X_2 est un vecteur non nul de $\mathcal{H}$, cela entraîne $\gamma \leq c^*$.

b) Le nombre c^* est donc la plus grande valeur propre de la matrice $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.