

Olivier HALGAND
olivier.halgand@ac-lyon.fr

PREMIER PROBLÈME

Partie A : Étude de φ_1

1. • Démontrons que φ_1 est linéaire : soit $P, Q \in \mathbb{R}_1[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda P + \mu Q) &= (X - a)(X - b)(\lambda P + \mu Q)' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(\lambda P + \mu Q) \\ &= (X - a)(X - b)(\lambda P' + \mu Q') - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda \left((X - a)(X - b)P' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)P \right) + \mu \left((X - a)(X - b)Q' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)Q \right) \\ &= \lambda \varphi_1(P) + \mu \varphi_1(Q). \end{aligned}$$

• Démontrons maintenant que $Im(\varphi_1) \subset \mathbb{R}_1[X]$. On a en particulier :

$$\varphi_1(1) = (X - a)(X - b) \cdot 0 - \left(X - \frac{a+b}{2}\right) \cdot 1 = \left(\frac{a+b}{2}\right) - X,$$

et :

$$\begin{aligned} \varphi_1(X) &= (X - a)(X - b) \cdot 1 - \left(X - \frac{a+b}{2}\right) \cdot X \\ &= X^2 - (a+b)X + ab - X^2 + \frac{a+b}{2}X \\ &= ab - \frac{a+b}{2}X. \end{aligned}$$

On a donc : $\varphi_1(1) \in \mathbb{R}_1[X]$ et $\varphi_1(X) \in \mathbb{R}_1[X]$ donc, par linéarité :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \varphi_1(\alpha + \beta X) = \alpha \varphi_1(1) + \beta \varphi_1(X) \in \mathbb{R}_1[X].$$

• Finalement :

$$\varphi_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[X]).$$

2. D'après **A.1.**

$$\text{la matrice de } \varphi_1 \text{ relativement à la base } \mathcal{B}_1 \text{ est : } M_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Par équivalences :

$$\varphi_1 \text{ est bijective} \Leftrightarrow \det(M_1) \neq 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + ab \neq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 4ab \neq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \neq 0,$$

donc :

$$\varphi_1 \text{ est bijective si, et seulement si : } a \neq b.$$

4. (a) Puisque $a \neq b$, les polynômes $X - a$ et $X - b$ ne sont pas proportionnels, donc la famille $\mathcal{B} = (X - a, X - b)$ est libre. De plus elle est aussi maximale car : $\text{Card}(\mathcal{B}) = 2 = \dim(\mathbb{R}_1[X])$. Donc :

$$\mathcal{B} = (X - a, X - b) \text{ est une base de } \mathbb{R}_1[X].$$

(b) On a :

$$\varphi_1(X - a) = (X - a)(X - b) \cdot 1 - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(X - a) = \left(\frac{a-b}{2}\right)(X - a),$$

et :

$$\varphi_1(X - b) = (X - a)(X - b) \cdot 1 - \left(X - \frac{-a+b}{2}\right)(X - b) = (X - b).$$

Donc :

$$\text{la matrice de } \varphi_1 \text{ relativement à la base } \mathcal{B} \text{ est : } M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix} = \frac{a-b}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Puisque $X - a = (-a) \cdot 1 + 1 \cdot X$ et $X - b = (-b) \cdot 1 + 1 \cdot X$,

$$\text{la matrice de passage de } \mathcal{B}_1 \text{ à } \mathcal{B} \text{ est : } P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$\text{la matrice de passage de } \mathcal{B} \text{ à } \mathcal{B}_1 \text{ est : } P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1} = (P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}})^{-1} = \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix}.$$

(d) D'après la formule de changement de base, on a :

$$M = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1} M_1 P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} \quad \text{et} \quad M_1 = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} M P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}.$$

(e) Soit $p \in \mathbb{N}$. Puisque M est diagonale, on a :

$$M^p = \left(\frac{a-b}{2}\right)^p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^p \end{pmatrix}.$$

D'après 4.(d) on a aussi : $M_1^p = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} M^p P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}$, donc :

$$M_1^p = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{a-b}{2}\right)^p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^p \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix}$$

d'où :

$$M_1^p = \frac{(a-b)^{p-1}}{2^p} \begin{pmatrix} a - (-1)^p b & ab(1 - (-1)^p) \\ (-1)^p - 1 & -b + (-1)^p a \end{pmatrix}.$$

5. (a) Par définition, $\Gamma = \text{Vect}(I_2, M_1, M_1^2, M_1^3)$, donc :

$$\Gamma \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

(b) On a d'une part :

$$M_1^2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab & 0 \\ 0 & \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 I_2,$$

et, d'autre part :

$$M_1^3 = M_1^2 \cdot M_1 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 M_1.$$

Donc :

$$\boxed{M_1^2, M_1^3 \in Vect(I_2, M_1)}.$$

(c) D'après ce qui précède, on peut donc écrire : $\Gamma = Vect(I_2, M_1)$. De plus, puisque I_2 et M_1 sont (trivialement) linéairement indépendantes, :

$$\boxed{(I_2, M_1) \text{ est une base de } \Gamma}.$$

6. D'après 5.(b) et avec $a = 4$ et $b = 2$ on a : $M_1^2 = I_2$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est une symétrie.}}$$

De plus, d'après 4.(a), la matrice de φ_1 relativement à la base $\mathcal{B} = (X-4, X-2)$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Ainsi,

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est la symétrie par rapport à } Vect(X-4) \text{ parallèlement à } Vect(X-2)}.$$

Partie B : Quelques généralités sur φ_n

7. On démontre que φ_n est linéaire de la même manière que pour φ_1 . De plus :

$$\varphi_n(1) = -n \left(X - \frac{a+b}{2} \right),$$

et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\varphi_n(X^k) = (X-a)(X-b) \cdot kX^{k-1} - n \left(X - \frac{a+b}{2} \right) \cdot X^k = (k-n)X^{k+1} + (n-2k) \left(\frac{a+b}{2} \right) X^k + kabX^{k-1}.$$

En particulier, pour $k = n$, on obtient :

$$\varphi_n(X^n) = -n \left(\frac{a+b}{2} \right) X^n + nabX^{n-1}.$$

On en déduit que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi_n(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc, par linéarité de φ_n , on obtient : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Finalement :

$$\boxed{\varphi_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}.$$

8. (a) La fonction f est une fraction rationnelle : elle est donc continue sur son domaine de définition. Or le dénominateur est une fonction polynôme de degré 2 dont les racines sont a et b , donc celui-ci ne s'annule pas sur $I =]\alpha, +\infty[$ (et même est strictement positif sur I). Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } I}.$$

(b) Puisque f est continue sur I , d'après le théorème fondamental de l'intégration, elle admet des primitives sur I . En reconnaissant la forme $\frac{u'}{u}$:

$$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } I \text{ est : } F : x \in I \mapsto \ln(x^2 - (a+b)x + ab)}.$$

(c) L'équation différentielle peut s'écrire sous la forme : $y' - \frac{n}{2} \cdot \frac{2x - (a+b)}{x^2 - (a+b)x + ab} = 0$.

Puisqu'une primitive de $x \mapsto \frac{n}{2} \cdot \frac{2x - (a+b)}{x^2 - (a+b)x + ab}$ est $\frac{n}{2} F$, on en déduit que (C désignant une constante réelle) :

$$\text{les solutions de l'équation sur } I \text{ sont : } y : x \mapsto C \left(x^2 - (a+b)x + ab \right)^{n/2} = C \sqrt{(x-a)^n (x-b)^n}.$$

(d) Si $n = 2p$ est pair, alors :

$$P \in \text{Ker}(\varphi_{2p}) \Leftrightarrow (X-a)(X-b)P' - n \left(X - \frac{a+b}{2} \right) P = 0 \Leftrightarrow P' - \frac{nX - n \frac{a+b}{2}}{(X-a)(X-b)} P = 0.$$

Donc, d'après 8.(c) :

$$\text{si } n = 2p \text{ est pair, alors } \text{Ker}(\varphi_{2p}) = \text{Vect}(Q_{a,b}) \text{ avec } Q_{a,b} = (X-a)^p (X-b)^p.$$

(e) Si $n = 2p + 1$ est impair, alors de la même manière, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$P = C(X-a)^p (X-b)^p \sqrt{(X-a)(X-b)}.$$

Or, P est un polynôme donc :

- si $a = b$, alors : $\text{Ker}(\varphi_{2p+1}) = \text{Vect}(R_a)$ avec $R_a = (X-a)^{2p+1}$;
- si $a \neq b$, alors : $\text{Ker}(\varphi_{2p+1}) = \{0\}$.

Partie C : Intersections de courbes dans le cas où $n = 2$

9. Puisque $a = b$, on a : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi_2(P) = (X-a)^2 P' - 2(X-a)P$, d'où :

$$\varphi_2(1) = 2 - X + 2a, \varphi_2(X) = -X^2 + a^2 \text{ et } \varphi_2(X^2) = -2aX^2 + 2a^2X.$$

10. (a) On a donc : $f : x \mapsto -2(x-a)$ et $g : x \mapsto -2ax(x-a)$. Résolvons l'équation :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2(x-a) = -2ax(x-a) \Leftrightarrow -2(x-a)(1-ax) = 0 \Leftrightarrow \left(x = a \text{ ou } x = \frac{1}{a} \right).$$

De plus : $f(a) = 0$ et $f\left(\frac{1}{a}\right) = -2\left(\frac{1}{a} - a\right) = -\frac{2}{a} + 2a$. On en déduit que

$$\mathcal{C}_f \text{ et } \mathcal{C}_g \text{ admettent exactement deux points d'intersection : } A_a(a, 0) \text{ et } B_a\left(\frac{1}{a}, -\frac{2}{a} + 2a\right).$$

(b) On peut écrire :

$$-\frac{2}{a} + 2a = -2\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{2}{\left(\frac{1}{a}\right)},$$

Ainsi

$$\text{les points } B_a \text{ appartiennent à la courbe d'équation cartésienne : } y = -2x + \frac{2}{x}.$$

(c) On considère la fonction $u : x \mapsto -2x + \frac{2}{x}$ dont la représentation graphique est E . On a :

- d'une part : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) + 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, donc la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à E ;

- d'autre part : $\lim_{x \rightarrow 0} |u(x)| = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à E .

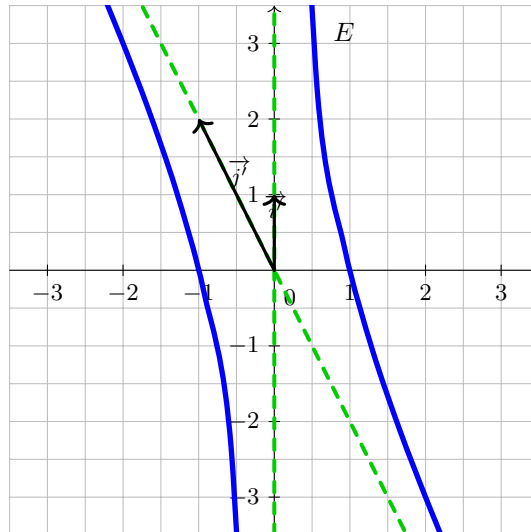
On considère le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{i}', \vec{j}')$ avec : $\vec{i}' = \vec{j}$ et $\vec{j}' = -\vec{i} + 2\vec{j}$. Alors : $\vec{i} = 2\vec{i}' - \vec{j}'$ et $\vec{j} = \vec{i}'$. Pour tout point M de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} , on a :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = x(2\vec{i}' - \vec{j}') + y\vec{i}' = (2x + y)\vec{i}' - x\vec{j}'.$$

Ainsi, les coordonnées de M dans \mathcal{R}' sont (x', y') avec : $x' = 2x + y$ et $y' = -x$. Dans le repère \mathcal{R}' , l'ensemble E a donc pour équation cartésienne : $x' = -\frac{2}{y'}$, ou encore : $x'y' = -2$. Ainsi :

E est une hyperbole, d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = -2x$.

(d) L'allure de la courbe est la suivante :



SECOND PROBLÈME

Partie A : Étude de deux fonctions

1. (a) Les fonctions \sin et $1 - \cos$ sont continues sur \mathbb{R} , et $x \mapsto x$ est continue sur \mathbb{R} et ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+^* . Par quotient,

les fonctions F et G sont continues sur \mathbb{R}_+^* .

(b) En reconnaissant des taux d'accroissements, on a :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

et :

$$\frac{1 - \cos x}{x} = -\frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\cos'(0) = \sin'(0) = 0.$$

Ainsi

F et G sont prolongeables par continuité en 0 en posant : $F(0) = 1$ et $G(0) = 0$.

2. (a) Les fonctions \sin et $1 - \cos$ sont dérivables sur \mathbb{R} , et $x \mapsto x$ est dérivable sur \mathbb{R} et ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+^* . Par quotient,

les fonctions F et G sont dérivables sur \mathbb{R}_+^* .

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = \frac{(\cos x)x - (\sin x)1}{x^2} \quad \text{et} \quad G'(x) = \frac{(\sin x)x - (1 - \cos x)1}{x^2},$$

soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \quad \text{et} \quad G'(x) = \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2}.$$

(b) On sait que :

$$\sin x =_0 x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \text{donc :} \quad F(x) =_0 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

et :

$$\cos x =_0 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \text{donc :} \quad G(x) =_0 \frac{x}{2} + o(x^2).$$

On en déduit que :

F et G sont dérivables en 0 et : $F'(0) = 0$, $G'(0) = \frac{1}{2}$.

3. (a) Par équivalences :

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x = 0 \text{ et } x > 0) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}^*, x = k\pi).$$

Donc :

les zéros de F constituent la suite strictement croissante $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ avec : $a_k = k\pi$.

(b) De même, sur \mathbb{R}_+^* :

$$G(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}^*, x = 2k\pi).$$

Donc :

les zéros de G constituent la suite strictement croissante $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ avec : $b_k = 2k\pi = 2a_k$.

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction F étant dérivable sur \mathbb{R}_+^* , elle l'est sur $[a_k, a_{k+1}]$ avec : $F(a_k) = F(a_{k+1}) = 0$. D'après le théorème de Rolle :

$$\exists x_k \in]a_k, a_{k+1}[, F'(x_k) = 0.$$

(b) D'après A.2.(a), on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. Ainsi, le dénominateur étant strictement positif,

$$\text{sur } \mathbb{R}_+^*, F' \text{ a le même signe que } h : x \mapsto x \cos x - \sin x.$$

(c) La fonction h est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+ (comme somme et produit de fonctions qui le sont), et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, h'(x) = (\cos x - x \sin x) - \cos x = -x \sin x.$$

Or, d'après 3.(a), h ne s'annule pas sur $]a_k, a_{k+1}[$, donc h' non plus. On en déduit que :

$$h \text{ est strictement monotone sur } [a_k, a_{k+1}].$$

(d) D'après ce qui précède, sur $]a_k, a_{k+1}[$, $F'(x_k) = 0 \Leftrightarrow h(x_k) = 0$. Or, la fonction h étant strictement monotone sur cet intervalle, h , et donc F' , s'annule au plus une fois (sur cet intervalle). Donc

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe un unique } x_k \in]a_k, a_{k+1}[\text{ tel que : } F'(x_k) = 0.$$

(e) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$h(a_k) = (k\pi) \cos(k\pi) - \sin(k\pi) = (-1)^k k\pi$$

et :

$$h\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right) = \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 - (-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

Ainsi, $h(a_k)$ et $h\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right)$ sont de signes contraires et non nuls, donc, la fonction h étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule entre a_k et $a_k + \frac{\pi}{2}$. D'après ce qui précède, cela signifie que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k \in \left]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}\right[.$$

(f) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $x_k > a_k = k\pi$. Or : $\lim_{k \rightarrow +\infty} k\pi = +\infty$ donc, d'après le théorème de minoration

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty.$$

De plus, d'après **A.4.(e)** :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 1 = \frac{a_k}{a_k} < \frac{x_k}{a_k} < \frac{a_k + \frac{\pi}{2}}{a_k},$$

donc, puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k + \frac{\pi}{2}}{a_k} = 1$, d'après le théorème d'encadrement : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k}{a_k} = 1$, ce qui signifie que :

$$x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} a_k = k\pi.$$

5. L'allure de la courbe \mathcal{C}_F est donc :



Partie B : deux fonctions définies par des intégrales

6. La fonction f étant de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, en particulier elle est continue et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions : $t \mapsto f(t) \cos(xt)$ et $x \mapsto f(t) \sin(xt)$ sont continues sur $[0, 1]$: elles sont donc intégrables sur ce segment, et donc

pour tout réel x , les intégrales $I_f(x)$ et $J_f(x)$ sont bien définies.

7. Puisque \cos est paire et \sin impaire, on en déduit immédiatement que

I_f est paire et J_f est impaire.

8. (a) Par linéarité de l'intégrale, pour tout réel x :

$$I_f(x) + iJ_f(x) = \int_0^1 f(t) (\cos(xt) + i \sin(xt)) dt = \int_0^1 f(t) e^{ixt} dt.$$

Puisque f et $t \mapsto e^{ixt}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, on peut effectuer une intégration par parties ce qui donne, pour tout $x > 0$:

$$I_f(x) + iJ_f(x) = \left[f(t) \frac{e^{ixt}}{ix} \right]_0^1 - \int_0^1 f'(t) \frac{e^{ixt}}{ix} dt,$$

d'où :

$$I_f(x) + iJ_f(x) = \frac{f(1) e^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix} \int_0^1 f'(t) e^{ixt} dt.$$

(b) La fonction f étant de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, cela signifie que f et f' sont continues sur le segment $[0, 1]$, et donc

$$f \text{ et } f' \text{ sont bornées sur } [0, 1].$$

(c) D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit donc que, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} |I_f(x) + iJ_f(x)| &\leq \left| \frac{f(1) e^{ix} - f(0)}{ix} \right| + \left| \frac{1}{ix} \int_0^1 f'(t) e^{ixt} dt \right| \\ &\leq \frac{|f(1)| + |f(0)|}{x} + \frac{1}{x} \int_0^1 |f'(t)| dt \\ &\leq \frac{2M}{x} + \frac{M'}{x}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \frac{A}{x}, \quad \text{avec } A = 2M + M'.$$

(d) Or, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A}{x} = 0$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (I_f(x) + iJ_f(x)) = 0, \quad \text{d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} I_f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} J_f(x) = 0.$$

(e) Par parité de I_f et imparité de J_f , on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} I_f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} J_f(x) = 0.$$

9. (a) On a la formule de trigonométrie :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right).$$

(b) La fonction \sin est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et $|\sin'| = |\cos| \leq 1$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad |\sin u - \sin v| \leq |u - v|.$$

En particulier, pour $v = 0$ on obtient :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |\sin u| \leq |u|.$$

(c) Soient x et y deux réels. On a :

$$\begin{aligned}
 |I_f(x) - I_f(y)| &= \left| \int_0^1 f(t) (\cos(xt) - \cos(yt)) dt \right| \\
 &\leq \int_0^1 |f(t)| |\cos(xt) - \cos(yt)| dt && \left. \begin{array}{l} d'après l'inégalité \\ triangulaire \end{array} \right\} \\
 &\leq \int_0^1 |f(t)| \left| -2 \sin \frac{xt+yt}{2} \sin \frac{xt-yt}{2} \right| dt && \left. \begin{array}{l} d'après \mathbf{B.9. (a)} \\ d'après \mathbf{B.9. (c)} \end{array} \right\} \\
 &\leq \int_0^1 |f(t)| \left(2 \times 1 \times \left| \frac{(x-y)t}{2} \right| \right) dt \\
 &\leq \int_0^1 |f(t)| \left(2 \frac{|x-y|t}{2} \right) dt
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |I_f(x) - I_f(y)| \leq |x - y| \int_0^1 t |f(t)| dt.}$$

(d) On a, pour tout réel x : $\lim_{y \rightarrow x} |x - y| = 0$ donc : $\lim_{y \rightarrow x} |I_f(x) - I_f(y)| = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{y \rightarrow x} I_f(y) = I_f(x),$$

ce qui signifie que I_f est continue en x . Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } I_f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

10. On considère la fonction $f = \mathbf{1} : x \mapsto 1$. Alors, pour tout $x > 0$:

$$I_{\mathbf{1}} = \int_0^1 \cos(xt) dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x} \right]_0^1 = \frac{\sin x}{x},$$

et :

$$J_{\mathbf{1}} = \int_0^1 \sin(xt) dt = \left[\frac{-\cos(xt)}{x} \right]_0^1 = \frac{-\cos x + 1}{x}.$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{I_{\mathbf{1}} = F \text{ et } J_{\mathbf{1}} = G.}$$