

EPREUVE CCP PSI 2012, MATH I en 4 h

Calculatrice autorisée

PARTIE 1

1. Travaillons par équivalence :

$$X(t) = e^{\lambda t}V \text{ est solution de } (E_0)$$

$$\text{SSI } X'(t) = AX(t)$$

$$\text{SSI } \lambda e^{\lambda t}V = Ae^{\lambda t}V$$

$$\text{SSI } \lambda V = AV \text{ car } e^{\lambda t} \neq 0$$

SSI V est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ car $V \neq 0$ d'après l'énoncé.

2. La calculatrice étant autorisée, n'hésitons pas !

2.1. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve 4 valeurs propres complexes simples :

$$\text{Sp}(A) = \{1, 2, i, -i\}$$

Puis pour chaque valeur propre, une base de l'espace propre :

$$E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

puis deux espaces conjugués

$$E_i = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_{-i} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

D'après la question I.1, on en déduit 4 solutions de (E_0) :

$$X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3(t) = e^{it} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_4(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il reste à montrer que la famille (X_1, X_2, X_3, X_4) forme un système fondamental de solutions.

Calculons le wronskien de cette famille :

$$w(t) = \det W(t) = e^t e^{2t} e^{it} e^{-it} \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2ie^{3t} \neq 0$$

Il est non nul : (X_1, X_2, X_3, X_4) est un système fondamental de solutions.

On en déduit que la solution générale de l'équation homogène s'écrit :

$$X(t) = \lambda_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 e^{it} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 e^{-it} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quatres complexes.

2.2. Ecrivons le système obtenu :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) + x_3(t) - x_4(t) + te^t \\ x_2'(t) = 2x_2(t) + e^t \\ x_3'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_4'(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) - te^t \end{cases}$$

Suivons les indications de l'énoncé et commençons par trouver x_2 :

$$x_2'(t) = 2x_2(t) + e^t$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

les solutions de l'équation homogène sont les applications $t \mapsto \lambda e^{2t}$.

Comme $2 \neq 1$, on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto P(t)e^t$ ou P est un polynôme de degré 0, soit une constante. En remplaçant, on trouve $P(t) = -1$.

Au final, $x_2 : t \mapsto \lambda_2 e^{2t} - e^t$ avec λ_2 réel.

Passons ensuite à x_3 :

$$x_3'(t) - x_3(t) = \lambda_2 e^{2t} - e^t$$

C'est encore une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

les solutions de l'équation homogène sont les applications $t \mapsto \lambda e^t$.

$t \mapsto te^t$ est solution particulière pour le second membre égal à $t \mapsto e^t$.

Cherchons une solution particulière pour le second membre égal à $\lambda_2 e^{2t}$.

Comme $2 \neq 1$, on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto P(t)e^{2t}$ ou P est un polynôme de degré 0, soit une constante. En remplaçant, on trouve $P(t) = \lambda_2$.

Au final, $x_3 : t \mapsto \lambda_3 e^t + \lambda_2 e^{2t} - te^t$ avec λ_3 réel.

Passons ensuite à x_1 et x_4 :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) + x_3(t) - x_4(t) + te^t \\ x_4'(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_4(t) + \lambda_3 e^t + e^t \\ x_4'(t) = x_1(t) + \lambda_3 e^t - 2te^t + e^t \end{cases}$$

C'est un système linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

Inutile de passer par les matrices. On remarque en effet que en dérivant la ligne 1 et à l'aide de la ligne 2 :

$$x_1''(t) = -x_4'(t) + \lambda_3 e^t + e^t = -x_1(t) + 2te^t \text{ soit encore}$$

$$x_1''(t) + x_1(t) = 2te^t$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

L'équation caractéristique a pour racine i et $-i$ (on retrouve les vap de A).

Les solutions réelles sont les $t \mapsto \alpha \cos t + \beta \sin t$.

Comme $1 \neq \pm i$, on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto P(t)e^t$ ou P est un polynôme de degré 1, soit une constante. Notons $P(t) = at + b$ et en remplaçant, on trouve $P(t) = t - 1$.

Au final, $x_1 : t \mapsto \alpha \cos t + \beta \sin t + te^t - e^t$ avec α, β réels.

Il ne reste plus qu'à dériver pour obtenir que

$$x_4(t) = -x_1'(t) + \lambda_3 e^t + e^t = \alpha \sin t - \beta \cos t + \lambda_3 e^t + e^t - te^t.$$

$$\text{D'où la solution } \begin{cases} x_1(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + te^t - e^t \\ x_2(t) = \lambda_2 e^{2t} - e^t \\ x_3(t) = \lambda_3 e^t + \lambda_2 e^{2t} - te^t \\ x_4(t) = \alpha \sin t - \beta \cos t + \lambda_3 e^t + e^t - te^t \end{cases}$$

Ajoutons alors les conditions initiales de l'énoncé :
$$\begin{cases} x_1(0) = -1 = \alpha - 1 \\ x_2(0) = -1 = \lambda_2 - 1 \\ x_3(0) = -1 = \lambda_3 + \lambda_2 \\ x_4(0) = 0 = -\beta + \lambda_3 + 1 \end{cases}$$

Ce système se résout facilement : $\alpha = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1, \beta = 0$

d'où la solution :
$$X(t) = \begin{pmatrix} te^t - e^t \\ -e^t \\ -e^t - te^t \\ -te^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-1)e^t \\ -e^t \\ -(t+1)e^t \\ -te^t \end{pmatrix}.$$

PARTIE 2

1. On considère la solution X de (E_0) telle que $X(t_0) = V$, soit $\Phi_{t_0}(X) = V$.
Comme Φ_{t_0} est un isomorphisme, on $\Phi_{t_0}^{-1}(V) = X$.

Appliquons alors Φ_t à la relation précédente :
$$\boxed{(\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1})(V) = X(t)}$$

2. **2.1.** Notons A cette matrice : la j -ème colonne de A est l'expression de $\Phi_{t_0}(X_j) = X_j(t_0)$ par rapport à la base canonique $(C_1 \dots C_n)$. C'est donc bien $\boxed{\text{la matrice wronskienne } W(t_0)}$.

- 2.2.** Montrons que la matrice $R(t, t_0) = W(t)(W(t_0))^{-1}$ est indépendante du système fondamental (X_1, \dots, X_n) choisi.

Utilisons les questions précédentes :

par II.2.1, $R(t, t_0)$ est la matrice de l'application linéaire $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}$ qui va de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans lui-même, muni de sa base canonique $(C_1 \dots C_n)$. La j -ème colonne de $R(t, t_0)$ est donc l'expression de $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}(C_j)$ par rapport à la base canonique $(C_1 \dots C_n)$.

Par II.1, $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}(C_j)$ est la solution de (E_0) vérifiant la condition initiale $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}(C_j)(t_0) = C_j$: cette solution ne dépend pas du système fondamental (X_1, \dots, X_n) choisi :

$\boxed{\text{la matrice } R(t, t_0) = W(t)(W(t_0))^{-1} \text{ est indépendante du système fondamental } (X_1, \dots, X_n)}$.

Une autre méthode consiste à prendre un autre système fondamental (Y_1, \dots, Y_n) , de noter P la matrice de passage de (X_1, \dots, X_n) à (Y_1, \dots, Y_n) , bases de l'espace de départ S_0 . Il faut faire attention ensuite aux notations : en mettant X et Y en indice pour les désigner les bases considérées : par la formule de changement de bases, on a $W_Y(t_0) = W_X(t_0)P$ et $W_Y(t) = W_X(t)P$. En calculant, on obtient $W_Y(t) \circ (W_Y(t_0))^{-1} = W_X(t) \circ (W_X(t_0))^{-1}$ donc la matrice $R(t, t_0) = W(t)(W(t_0))^{-1}$ est indépendante du système fondamental (X_1, \dots, X_n) .

3. **3.1.** On a donc $R(t, t_0) = W(t)(W(t_0))^{-1}$.

En dérivant par rapport à t , $R'(t, t_0) = W'(t)(W(t_0))^{-1}$.

De plus, $W(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ donc $W'(t) = (X_1'(t), \dots, X_n'(t))$. Or les fonctions X_i sont des solutions de (E_0) : $X_i'(t) = A(t)X_i(t)$.

On obtient donc $W'(t) = (X_1'(t), \dots, X_n'(t)) = A(t)(X_1(t), \dots, X_n(t)) = A(t)W(t)$ d'où au final, $R'(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$.

Multiplions cette relation par V : on obtient que $X(t) = R(t, t_0)V$ est solution de (E_0) .

De plus, en t_0 , $X(t_0) = R(t_0, t_0)V = V$.

$\boxed{X(t) = R(t, t_0)V \text{ est donc l'unique (problème de Cauchy) solution de } (E_0) \text{ vérifiant } X(t_0) = V}$.

- 3.2.** En calculant, $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = W(t_2)(W(t_1))^{-1}W(t_1)(W(t_0))^{-1} = W(t_2)(W(t_0))^{-1} = R(t_2, t_0)$.

En particulier, $R(t_0, t)R(t, t_0) = R(t_0, t_0) = I_n$: la matrice $R(t, t_0)$ est inversible et son inverse est

$$(R(t, t_0))^{-1} = R(t_0, t)$$

4. 4.1. Comme $X(t) = R(t, t_0)V(t)$, en dérivant le produit de matrices, on a $X'(t) = R'(t, t_0)V(t) + R(t, t_0)V'(t)$.

Or d'après II.3.1, $R'(t, t_0) = A(t)R(t, t_0) : X'(t) = A(t)X(t) + R(t, t_0)V'(t)$.

Comme X est solution de (E) , on en déduit que $R(t, t_0)V'(t) = B(t)$.

4.2. Cette question comporte une erreur d'énoncé car V n'est pas solution de V . Par contre, l'expression demandée de V est juste

De la question précédente, on déduit que $V'(t) = R(t, t_0)^{-1}B(t) = R(t_0, t)B(t)$ par II.3.2.

En prenant une primitive, on en déduit que $V(t) = \int_{t_0}^t R(t_0, u)B(u) du$ convient.

4.3. Notons alors $Y(t) = R(t, t_0)V(t) = R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, u)B(u) du = \int_{t_0}^t R(t, t_0)R(t_0, u)B(u) du$.

Par II.4.4., on a $Y(t) = \int_{t_0}^t R(t, u)B(u) du$.

La fonction Y est dérivable sur I et par II.4.1

$Y'(t) = R'(t, t_0)V(t) + R(t, t_0)V'(t) = A(t)Y(t) + R(t, t_0)R(t_0, t)B(t) = A(t)Y(t) + B(t)$.

Y est donc une solution particulière de (E) .

PARTIE 3

1. 1.1. Cherchons une solution polynomiale sous la forme $y(t) = a_m t^m + \dots + a_0$ avec $a_m \neq 0$.

Le polynôme y est donc de degré m . Sa dérivée est de degré $m - 1$ et $t(t - 1)y''(t)$ est aussi de degré m .

Comme y est solution de (e_0) , en cherchant le terme de degré m dans

$$t(t - 1)y''(t) + 3y'(t) + 6y(t) = 0$$

On obtient $m(m - 1)a_m t^m + 6a_m t^m = 0$ avec $a_m \neq 0$.

On en déduit que $m(m - 1) + 6 = 0$ soit $m = 3$ ou $m = -2$, cette dernière solution étant impossible.

Les solutions polynomiales sont donc de degré 3.

Notons alors $y(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ une telle solution.

Remplaçons dans l'équation (e_0) :

En regroupant les termes de même degré

$$(6a - 6a)t^3 + (2b - 6a + 9a - 6b)t^2 + (-2b + 6b - 6c)t + 3c - 6d = 0$$

On en déduit que
$$\begin{cases} b = \frac{3}{4}a \\ c = \frac{2}{3}a \\ d = \frac{1}{4}a \end{cases}$$

Les polynômes solutions de (e) sont donc les $P(t) = \frac{a}{4}(4t^3 + 3t^2 + 2t + 1)$.

Si on ajoute la condition initiale $P(0) = 1$, on obtient que $a = 4$ et l'unique solution est alors

$$P(t) = 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1$$

1.2. Soit $Q(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$. Cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$.

On obtient en dérivant

$$Q'(t) = \frac{2}{(1-t)^3}, \quad Q''(t) = \frac{6}{(1-t)^4}.$$

En remplaçant dans (e) , on trouve bien que Q est solution de (e_0) .

1.3. i. On cherche maintenant les solutions développables en série entière.

Ecrivons une telle solution sous la forme $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ et notons R son rayon de convergence.

Cette fonction est de classe C^∞ sur $] -R, R[$.

De plus, $y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}$, $y''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2}$.

Remplaçons dans (e_0) :

$$(t^2 - t) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} - 6 \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-1} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} - 6 \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = 0$$

Soit en faisant les changements d'indices adéquates :

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^k - \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) k a_{k+1} t^k + 3 \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_{k+1} t^k - 6 \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = 0$$

L'intervalle commun de sommation va de 2 à ∞ : par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que :

$$a_1 = a_0/2, a_2 = 3a_1/2 \text{ et}$$

$$\forall k \geq 2, (k(k-1) - 6) a_k + (3(k+1) - k(k+1)) a_{k+1} = 0,$$

$$\text{soit } (k-3)(k+1) a_{k+1} = (k-3)(k+2) a_k.$$

D'où $\boxed{\text{si } k \neq 3, a_{k+1} = \frac{k+2}{k+1} a_k.}$

Au final, on peut donc écrire que $a_1 = 2a_0$, $a_2 = 3a_0$, $a_3 = \frac{4}{3}a_2 = 4a_0$ et $\forall k \geq 4$,

$$a_k = \frac{k+1}{k} a_{k-1}.$$

On a alors $a_k = \frac{k+1}{k} a_{k-1} = \frac{k+1}{k} \frac{k}{k-1} a_{k-2} = \dots = \frac{k+1}{k} \frac{k}{k-1} \dots \frac{6}{5} a_4 = \frac{k+1}{5} a_4$.

La série entière s'écrit donc $\boxed{y(t) = a_0(1 + 2t + 3t^2 + 4t^3) + \frac{a_4}{5} \sum_{k=4}^{\infty} (k+1)t^k.}$

Trouvons le rayon de convergence de la série entière :

- Si $a_4 = 0$, on a la série entière nulle de rayon $+\infty$.

- Si $a_4 \neq 0$, les coefficients sont tous non nuls : utilisons la règle de d'Alembert :

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k+2}{k+1} \text{ qui tend vers } 1 \text{ quand } k \rightarrow +\infty. \text{ Le rayon est alors } R = 1$$

ii. Avec la question précédente, on en déduit que $k_0 = 4 : \forall k \geq 4, \boxed{a_k = \frac{k+1}{5} a_4.}$

Retrouvons alors les fonctions P et Q .

Trouver le développement en série entière de $Q(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$.

Partons du DSE connu : $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$, de rayon $R = 1$.

On peut le dériver sur $] -1, 1[$ et on obtient alors

$$Q(t) = \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) t^k$$

Dans l'expression précédente, nous avons

$$\sum_{k=4}^{\infty} (k+1)t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)t^k - 1 - 2t - 3t^2 - 4t^3 = Q(t) - P(t)$$

Au final, on trouve donc que la série entière précédente s'écrit $y(t) = a_0P(t) + \frac{a_4}{5}(Q(t) - P(t))$

On retrouve donc P en prenant $a_0 = 1$ et $a_4 = 0$ et Q en prenant $a_0 = 1$ et $a_4 = 5$

2. 2.1. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ donc

$$X'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$

Posons alors $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$

On obtient alors l'équation matricielle (E) : $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

2.2. Il s'agit d'inverser la matrice $W(t_0) = \begin{pmatrix} f_0 & g_0 \\ f'_0 & g'_0 \end{pmatrix}$.

Par la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}A$, on obtient $W(t_0)^{-1} = \frac{1}{f_0g'_0 - f'_0g_0} \begin{pmatrix} g'_0 & -g_0 \\ -f'_0 & f_0 \end{pmatrix}$.

Calculons ensuite la résolvante : $R(t, t_0) = W(t)W(t_0)^{-1} = \frac{1}{f_0g'_0 - f'_0g_0} \begin{pmatrix} fg'_0 - gf'_0 & f_0g - g_0f \\ f'_0g'_0 - f'_0g' & g'_0f_0 - f'_0g_0 \end{pmatrix}$.

3. 3.1. On se place sur $I =]0, 1[$. L'équation (e) s'écrit alors $y'' + \frac{3}{t(t-1)}y' - \frac{6}{t(t-1)}y = \frac{20t^4}{t(t-1)}$.

Posons alors $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{6}{t(t-1)} & -\frac{3}{t(t-1)} \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{20t^3}{t-1} \end{pmatrix}$

On obtient alors l'équation matricielle (E) : $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

3.2. Notons alors $f(t) = P(t)$ et $g(t) = Q(t)$.

On a $\det W(u) = \begin{vmatrix} P(u) & Q(u) \\ P'(u) & Q'(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4u^3 + 3u^2 + 2u + 1 & \frac{1}{(1-u)^2} \\ 12u^2 + 6u + 2 & \frac{2}{(1-u)^3} \end{vmatrix}$

En calculant, $\det W(u) = \frac{2}{(1-u)^3}(4u^3 + 3u^2 + 2u + 1 - (1-u)(6u^2 + 3u + 1)) = \frac{20u^3}{(1-u)^3} \neq 0$.

Enfin, $Q(t)P(u) - P(t)Q(u) = \frac{1}{(1-t)^2}(4u^3 + 3u^2 + 2u + 1) - \frac{1}{(1-u)^2}(4t^3 + 3t^2 + 2t + 1)$

$$Q(t)P(u) - P(t)Q(u) = \frac{1}{(1-t)^2(1-u)^2}(4u^5 - 5u^4 - 4t^5 + 5t^4).$$

3.3. Appliquons tous les résultats vus précédemment .

Par II.4.3, on sait que $X(t) = \int_{t_0}^t R(t, u)B(u) du$ est une solution particulière de (E).

En prenant la première coordonnée, on aura alors $y(t)$ une solution particulière de (e).

Calculons $R(t, u)B(u) = R(t, u) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{20u^3}{u-1} \end{pmatrix}$

Or, seule la première coordonnée de ce produit nous intéresse : écrivons donc $R(t, u)$ sous la forme $R(t, u) = \begin{pmatrix} ? & * \\ ? & ? \end{pmatrix}$

Nous avons uniquement besoin de connaître * :

D'après les questions précédents,

$$\begin{aligned} * &= \frac{Q(t)P(u) - P(t)Q(u)}{\det W(u)} = \frac{(1-u)^3}{20u^3} \frac{1}{(1-t)^2(1-u)^2} (4u^5 - 5u^4 - 4t^5 + 5t^4) \\ * &= \frac{(4u^5 - 5u^4 - 4t^5 + 5t^4)(1-u)}{20u^3(1-t)^2}. \end{aligned}$$

Multiplions alors par $B(u)$ et intégrons : on obtient

$$y(t) = \int_{t_0}^t \frac{(4u^5 - 5u^4 - 4t^5 + 5t^4)(1-u)}{20u^3(1-t)^2} \frac{20u^3}{u-1} du$$

$$\text{donc } y(t) = \int_{t_0}^t \frac{-(4u^5 - 5u^4 - 4t^5 + 5t^4)}{(1-t)^2} du = \frac{1}{(1-t)^2} \int_{t_0}^t 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du$$

On obtient ainsi $y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \int_{t_0}^t 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du$, solution particulière de (e).

Appliquons alors Chasles sur l'intégrale :

$$y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \int_0^t 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du - \frac{1}{(1-t)^2} \int_0^{t_0} 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du$$

Calculons cette seconde intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^2} \int_0^{t_0} 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du &= \frac{1}{(1-t)^2} [4t^5 u - 5t^4 u - 4u^6/6 + u^5]_{u=0}^{u=t_0} \\ &= \frac{1}{(1-t)^2} [4t^5 t_0 - 5t^4 t_0 - 4t_0^6/6 + t_0^5]. \end{aligned}$$

Essayons alors de faire apparaître P et Q , les solutions de l'équation homogène :

$$\frac{1}{(1-t)^2} (4t^5 t_0 - 5t^4 t_0 - 4t_0^6/6 + t_0^5) = \frac{t_0}{(1-t)^2} (4t^5 - 5t^4) + Q(t) (-4t_0^6/6 + t_0^5)$$

Effectuons la division euclidienne de $4t^5 - 5t^4$ par $(1-t)^2$:

$$4t^5 - 5t^4 = (4t^3 + 3t^2 + 2t + 1)(1-t)^2 - 1$$

$$\text{d'où } \frac{4t^5 - 5t^4}{(1-t)^2} = 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1 - \frac{1}{(1-t)^2} = P(t) - Q(t).$$

Au final, $\frac{1}{(1-t)^2} \int_0^{t_0} 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du = t_0(P(t) - Q(t)) + (-4t_0^6/6 + t_0^5)Q(t)$: c'est donc une solution de l'équation homogène car combinaison linéaire des fonctions P et Q .

On en déduit que $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^2} \int_0^t 4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4 du$ est une solution particulière de (e).

Calculons alors cette intégrale : $y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} [4t^5 u - 5t^4 u - 4u^6/6 + u^5]_{u=0}^{u=t}$.

$$\text{Elle vaut alors } y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} [4t^6 - 5t^5 - 4t^6/6 + t^5] = \frac{10t^6 - 12t^5}{3(1-t)^2}.$$

Donc $y(t) = \frac{10t^6 - 12t^5}{3(1-t)^2} = \frac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2}$ est une solution particulière de (e).

En reprenant tout ce qui a été fait précédemment, on a une solution particulière de l'équation avec second membre (y) et une base (P, Q) de l'équation homogène.

Trouvons alors les solutions de (e) sur $[0, 1[$: on commence par se placer sur $]0, 1[$.

D'après le cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2, les solutions de (e) sont les fonctions $t \mapsto y(t) + \alpha P(t) + \beta Q(t)$ soit encore

$$t \mapsto \frac{10t^6 - 12t^5}{3(1-t)^2} + \alpha(1 + 2t + 3t^2 + 4t^3) + \beta \frac{1}{(1-t)^2}$$

De plus, de telles fonctions se prolongent naturellement en fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1[$.

Elles sont solutions de (e) sur $]0, 1[$. Il reste à voir ce qui se passe en 0.

L'équation (e) devient en 0, $3y'(0) - 6y(0) = 0$.

On a déjà $y(0) = \alpha + \beta$.

De plus, $y'(t) = \frac{(120t^5 - 120t^4)(1-t)^2 + 2(20t^6 - 24t^5)(1-t)}{6(1-t)^4} + \alpha(12t^2 + 6t + 2) + \beta \frac{2}{(1-t)^3}$,

donc $y'(0) = 2\alpha + 2\beta = 0$: la relation $3y'(0) - 6y(0) = 0$ est vérifiée et donc les fonctions précédentes sont bien solutions sur $[0, 1[$ tout entier.

En conclusion,

les solutions de (e) sur $[0, 1[$ sont les $t \mapsto \frac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2} + \alpha(1+2t+3t^2+4t^3) + \beta \frac{1}{(1-t)^2}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Enfin, ajoutons la condition initiale $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$:

$y(0) = 0$ donne $\alpha + \beta = 0$.

On a vu ci-dessus que $y'(0) = 2\alpha + 2\beta = 0$ soit encore $\alpha + \beta = 0$.

Les solutions de (e) sur $[0, 1[$ vérifiant la condition initiale demandée sont donc les fonctions

$$t \mapsto \frac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2} + \alpha \left[(1+2t+3t^2+4t^3) - \frac{1}{(1-t)^2} \right] \text{ avec } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}.$$

soit encore $t \mapsto \frac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2} + \alpha \frac{4t^5 - 5t^4}{(1-t)^2}$ avec α dans \mathbb{R} .