Concours commun Mines et Ponts

Correction de la première épreuve PC ; 2016

Olivier HALGAND

A Préliminaire

1. On a le développement en série entière suivant :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k.$$

Avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et en substituant x par $-x$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-x)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{1-2k}{2}\right)}{k!}(-1)^k x^k.$$

Posons : $a_0 = 1$ et : $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{1-2k}{2}\right)}{k!}(-1)^k$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k &= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\dots\frac{2k-1}{2}}{k!} = \frac{1.3\dots(2k-1)}{2^k.\,k!} = \frac{1.3\dots(2k-1)}{2^k.\,k!} \times \frac{2.4\dots(2k)}{2.4\dots(2k)} \\ &= \frac{(2k)!}{\left(2^k.\,k!\right)^2} = \frac{(2k)!}{4^k.(k!)(2k-k)!} = \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}.\end{aligned}$$

Comme on a aussi : $\dfrac{\binom{0}{0}}{4^0} = 1 = a_0$, on peut donc écrire :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k.}$$

B Identité de Karamata

2. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a : $x^{p+1} \in]-1,1[$. Or, on a la formule de factorisation suivante :

$$1 - x^{p+1} = (1-x)\left(\sum_{k=0}^{p} x^k\right),$$

donc :

$$\sqrt{1-x^{p+1}} f(x^{p+1}) = \sqrt{(1-x)\left(\sum_{k=0}^{p} x^k\right)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x^{p+1}\right)^k = \left(\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{(p+1)k}\right)\sqrt{\sum_{k=0}^{p} x^p}.$$

Or, par hypothèse : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{1-x^{p+1}} f(x^{p+1}) = \sqrt{\pi}$, et : $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\sum_{k=0}^{p} x^p} = \sqrt{\sum_{k=0}^{p} 1} = \sqrt{p+1}$, donc :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{(p+1)k} = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}.}$$

3. La fonction : $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Au voisinage de 0 : $\dfrac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^{\bullet} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente.

- En $+\infty$, on a : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} = 0$ par croissances comparées, donc : $\dfrac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$,

et $\displaystyle\int_{\bullet}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente.

Donc,

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Pour le calcul de cette intégrale, on pose le changement de variable : $u = (p+1)t$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On obtient donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{p+1}}}\frac{\mathrm{d}u}{p+1} = \frac{1}{\sqrt{p+1}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.}$$

4. Soit $Q = \displaystyle\sum_{p=0}^{\deg P} \alpha_p X^p$ un polynôme. D'après la question précédente :

$$\forall p \in [\![0, \deg P]\!], \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,$$

soit :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k x^{pk} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{-pt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'intégrale et de la limite (lorsque les intégrales, les limites et la somme sont finies), on en déduit que :

$$\sum_{p=0}^{\deg P} \alpha_p \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k x^{pk} = \sum_{p=0}^{\deg P} \alpha_p \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{-pt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

soit :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \left(\sum_{p=0}^{\deg P} \alpha_p x^{pk}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{\deg P} \alpha_p\,\mathrm{e}^{-pt}\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

ou encore :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k Q(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\,Q(\mathrm{e}^{-t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.}$$

5. La fonction h est continue par morceaux et positive sur $[0,1]$, donc la fonction : $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,h(\mathrm{e}^{-t})$ est continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Au voisinage de 0 : $\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}h(\mathrm{e}^{-t}) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^{\bullet} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente.

- Pour $t > 1$, on a : $h(t) = 0$ donc : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t})}{\sqrt{t}}h(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = 0$ (elle est donc convergente !).

Donc,

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} h(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} h(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t}\right]_0^1,$$

d'où :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} h(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = 2.}$$

6. Soit $x \in [0,1[$. Alors, la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroît et tend vers 0. En particulier, il existe un rang n_0 à partir duquel : $0 \leqslant x^k < \frac{1}{\mathrm{e}}$. Donc, à partir du rang n_0, on a : $a_k x^k h(x^k) = 0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1[, \text{ la série } \sum a_k x^k h(x^k) \text{ converge.}}$$

7. Pour $x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}$, on a : $x^k = \mathrm{e}^{-\frac{k}{n}} < \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \Leftrightarrow \quad k > n$ et : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} = 1^-$, et aussi : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k h(x^k) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. D'après l'égalité de Karamata, on obtient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} \sum_{k=0}^{n} a_k = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\, h(\mathrm{e}^{-t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2.$$

Or :

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \text{d'où :} \quad : \sqrt{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.}$$

C Théorème taubérien

8. • D'une part, puisque $\alpha \in]0,1[$, on a : $\alpha n \in]0,n[$ et donc : $[\alpha n] \in [\![0, n-1]\!]$. Donc :

$$S_n - S_{[\alpha n]} = \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n} a_k.$$

Or, cette somme comporte $n - \big([\alpha n]+1\big) + 1 = n - [\alpha n]$ termes positifs, tous supérieurs (ou égaux) à a_n car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc :

$$a_n \leqslant \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}.$$

• D'autre part, puisque $\beta > 1$ alors : $\beta n > n$ donc : $[\beta n] \geqslant n$. Or, par hypothèse, $n - [\beta n] \neq 0$, donc : $[\beta n] > n$. Ainsi, la somme $S_{[\beta n]} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{[\beta n]} a_k$ comporte $[\beta n] - n$ termes positifs, tous inférieurs (ou égaux) à a_{n+1}, donc aussi à a_n, et ainsi on a l'inégalité :

$$\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leqslant a_n.$$

On obtient donc l'encadrement :

$$\boxed{\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leqslant a_n \leqslant \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}.}$$

9. • On sait que : $\forall \gamma > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ tels que $[\gamma n] > 0$, on a :

$$\gamma n - 1 < [\gamma n] \leqslant \gamma n, \quad \text{donc :} \quad 1 - \frac{1}{\gamma n} < \frac{[\gamma n]}{\gamma n} \leqslant 1.$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit donc que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{[\gamma n]}{\gamma n} = 1$ et donc que : $[\gamma n] \underset{n \to +\infty}{\sim} \gamma n$. On en tire :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{[\gamma n]} = \frac{1}{\gamma}.}$$

• On a aussi :

$$\frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{[\gamma n]} a_k}{\sqrt{n}} \underset{\substack{n \to +\infty \\ \text{par hypothèse}}}{\sim} \frac{2\sqrt{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{\gamma n}}{\sqrt{n}},$$

donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\gamma}.}$$

10. D'après **8.**, on a l'encadrement :

$$\frac{\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{\sqrt{n}}}{\frac{[\beta n] - n}{n}} \leqslant \sqrt{n}\, a_n \leqslant \frac{\frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{\sqrt{n}}}{\frac{n - [\alpha n]}{n}}.$$

Or : $\frac{S_{[\beta n]}}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{\beta}$, $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2$ et $\frac{[\beta n]}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \beta$. d'où l'équivalent :

$$\frac{\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{\sqrt{n}}}{\frac{[\beta n] - n}{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{\beta} - 2}{\beta - 1}.$$

De la même manière, on a aussi :

$$\frac{\frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{\sqrt{n}}}{\frac{n - [\alpha n]}{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2 - 2\sqrt{\alpha}}{1 - \alpha}.$$

Par définition des limites, on a donc :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow \frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leqslant \sqrt{n}\, a_n \leqslant \frac{2(1 - \sqrt{\alpha})}{1 - \alpha} + \varepsilon.}$$

11. D'une manière générale, pour $x > 0$ et $x \neq 1$, on a :

$$\frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} = \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des réels α et β tels que : $0 < \alpha < 1 < \beta$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 1 - 2\varepsilon \leqslant \frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leqslant \sqrt{n}\, a_n \leqslant \frac{2(1 - \sqrt{\alpha})}{1 - \alpha} \leqslant 1 + 2\varepsilon.$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, a_n = 1,} \qquad \text{soit :} \qquad \boxed{a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.}$$

D Marche aléatoire

12. Puisque les variables aléatoires X_i sont indépendantes, on a :

$$\mathbb{P}\big(X_{k+1}=i_1,\ldots,X_n=i_{n-k}\big)=\prod_{j=k+1}^{n}\mathbb{P}\big(X_j=i_{j-k}\big)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

De même :

$$\mathbb{P}\big(X_1=i_1,\ldots,X_{n-k}=i_{n-k}\big)=\prod_{j=1}^{n-k}\mathbb{P}\big(X_j=i_j\big)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

D'où l'égalité :

$$\boxed{\mathbb{P}\big(X_{k+1}=i_1,\ldots,X_n=i_{n-k}\big)=\mathbb{P}\big(X_1=i_1,\ldots,X_{n-k}=i_{n-k}\big).}$$

13. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\big(S_{k+1}-S_k=j_1,S_{k+2}-S_k=j_2,\ldots,S_n-S_k=j_{n-k}\big)\\ =\ &\mathbb{P}\left(X_{k+1}=j_1,X_{k+2}+X_{k+1}=j_2,\ldots,\sum_{j=k+1}^{n}X_j=j_{n-k}\right)\\ =\ &\mathbb{P}\big(X_{k+1}=j_1,X_{k+2}=j_2-j_1,\ldots,X_n=j_{n-k}-j_{n-k-1}\big)\end{aligned}$$

Et de la même manière :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\big(S_1=j_1,S_2=j_2,\ldots,S_{n-k}=j_{n-k}\big)\\ =\ &\mathbb{P}\left(X_1=j_1,X_2=j_2-j_1,\ldots,X_{n-k}=j_{n-k}-j_{n-k-1}\right)\end{aligned}$$

La question précédente permet donc de conclure :

$$\boxed{\mathbb{P}\big(S_{k+1}-S_k=j_1,S_{k+2}-S_k=j_2,\ldots,S_n-S_k=j_{n-k}\big)=\mathbb{P}\big(S_1=j_1,S_2=j_2,\ldots,S_{n-k}=j_{n-k}\big).}$$

14. Par définition : $A_k^n=\{S_k=0\}\cap\{S_{k+1}\neq 0\}\cap\ldots\cap\{S_n\neq 0\}$, et donc, d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(A_k^n)=\mathbb{P}(S_k=0)\,\mathbb{P}_{(S_k=0)}\big(S_{k+1}\neq 0,\ldots,S_n\neq 0\big).$$

Or, évidemment :

$$\mathbb{P}_{(S_k=0)}\big(S_{k+1}\neq 0,\ldots,S_n\neq 0\big)=\mathbb{P}_{(S_k=0)}\big(S_{k+1}-S_k\neq 0,\ldots,S_n-S_k\neq 0\big).$$

Or, $S_{k+1}-S_k=X_{k+1}$, ..., $S_n-S_k=X_{k+1}+\cdots+X_n$ ne dépendent que de $X_{k+1},\ldots,X_n$ alors que S_n ne dépend que de $X_1,\ldots,X_n$. On en déduit que $S_{k+1}-S_k$, ..., S_n-S_k ne dépendent pas de S_k, et donc :

$$\mathbb{P}_{(S_k=0)}\big(S_{k+1}\neq 0,\ldots,S_n\neq 0\big)=\mathbb{P}\big(S_{k+1}-S_k\neq 0,\ldots,S_n-S_k\neq 0\big).$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{(S_k=0)}\big(S_{k+1}\neq 0,\ldots,S_n\neq 0\big)\\ =\ &\mathbb{P}\left(\bigcup_{j_1,\ldots,j_{n-k}\neq 0}\Big(S_{k+1}-S_k=j_1,\ldots,S_n-S_k=j_{n-k}\Big)\right)\\ =\ &\sum_{j_1,\ldots,j_{n-k}\neq 0}\mathbb{P}\Big(S_{k+1}-S_k=j_1,\ldots,S_n-S_k=j_{n-k}\Big)\end{aligned}$$

car les évènements sont incompatibles : on ne peut avoir $S_{k+1}-S_k=j_1,\ldots,S_n-S_k=j_{n-k}$ et $S_{k+1}-S_k=j_1',\ldots,S_n-S_k=j_{n-k}'$ s'il existe p tel que $j_p\neq j_p'$.

Enfin, la question précédente nous donne alors :

$$\mathbb{P}_{(S_k=0)}\big(S_{k+1} \neq 0, \ldots, S_n \neq 0\big) = \sum_{j_1,\ldots,j_{n-k}\neq 0} \mathbb{P}\Big(S_1 = j_1, \ldots, S_{n-k} = j_{n-k}\Big),$$

et donc :

$$\mathbb{P}_{(S_k=0)}\big(S_{k+1} \neq 0, \ldots, S_n \neq 0\big) = \mathbb{P}\big(S_1 \neq 0, \ldots, S_{n-k} \neq 0\big) = \mathbb{P}(E_{n-k}).$$

On obtient donc bien :

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\,\mathbb{P}(E_{n-k}).}$$

15. • Soient $k, k' \in [\![0, n-1]\!]$ avec $k' < k$. Par définition, $A_{k'}^n = \{S_{k'} = 0\} \cap \bigcap_{i=k'+1}^{n} \{S_i \neq 0\}$.

Considérons $\omega \in \mathcal{A}_{k'}^n$. Alors $S_k(\omega) \neq 0$ car $k \in [\![k'+1, n]\!]$, et donc : $\omega \notin A_k^n$. On en déduit donc que $A_{k'}^n \cap A_k^n = \varnothing$, c'est-à-dire que les A_k^n sont deux à deux disjoints.

• Soit maintenant $\omega \in \Omega$. Alors :
- soit $T(\omega) > n$ auquel cas : $\omega \in A_0^n$;
- soit $T(\omega) \leqslant n$ et alors, en posant $p = \max\big\{k \in [\![1,n]\!], S_k(\omega) = 0\big\}$, alors : $\omega \in A_p^n$.

Donc, on en déduit que : $\bigcup_{k=0}^{n} A_k^n = \Omega$.

• Finalement, on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k^n\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

d'où, d'après la question précédente :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0)\,\mathbb{P}(E_{n-k}) = 1.}$$

16. Effectuons le produit de Cauchy des deux séries de rayon de convergence $\geqslant 1$:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n,$$

avec, en utilisant la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0)\,\mathbb{P}(E_{n-k}) = 1.$$

Donc :

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.}$$

17. • Supposons n impair. Alors, puisque $X_k(\omega) = \pm 1$ pour tout entier k et tout $\omega \in \Omega$, alors $\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$ contient un nombre impair de nombres impairs, ce qui donne un résultat impair. Donc :

$$\boxed{\text{si } n \text{ est impair, alors : } \mathbb{P}(S_n = 0).}$$

• Supposons n pair. Pour obtenir une somme nulle, il faut et il suffit qu'il y ait exactement le même nombre, c'est-à-dire $\frac{n}{2}$, de $+1$ et de -1. Dans ce cas, on a donc :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{n}{2}},$$

et ainsi :

$$\boxed{\text{si } n \text{ est pair, alors : } \mathbb{P}(S_n = 0) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

18. On a donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) x^n = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} (x^2)^k \underset{\mathbf{1.}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

D'où, d'après **16.** :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) x^n = \frac{1}{1-x} \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{(1-x)(1+x)}}{1-x},$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \left]0,1\right[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.}$$

19. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{P}(E_n)$. Alors la série $\sum a_k x^k$ converge absolument sur $\left]-1,1\right[$ et considérons sa somme f. Alors, d'après la question précédente :

$$\forall x \in \left]0,1\right[, \quad f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

De plus : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sqrt{1-x} f(x) = \sqrt{\pi}$, et donc, d'après **B.7.**, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n},$$

et donc, d'après **C.11.**, on a :

$$a_k = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{P}(E_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

et ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}(E_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.}$$

20. On a évidemment : $\{T = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ et comme les évènements E_n forment une suite décroissante ($\forall n \in \mathbb{N}, E_{n+1} \subset E_n$), on en déduit :

$$\boxed{\mathbb{P}(T = +\infty) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(E_n) = 0.}$$

21. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(T = n) = 1 - \mathbb{P}(T > n) - \mathbb{P}(T < n) = 1 - \mathbb{P}(E_n) - \Big(1 - \mathbb{P}(T \geqslant n)\Big) = \mathbb{P}(E_{n-1}) - \mathbb{P}(E_n),$$

car T ne prenant que des valeurs entières (ou infinies) ou a : $\{T \geqslant n\} = \{T > n-1\}$. On en déduit donc :

$$\forall x \in]0,1[, \qquad \mathbb{P}(T=n)x^n = \mathbb{P}(E_{n-1})x^n - \mathbb{P}(E_n)x^n$$

$$\begin{aligned}
\text{donc : } \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=n)x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_{n-1})x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n \\
&= x\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_{n-1})x^{n-1} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n - \mathbb{P}(E_0)x^0\right) \\
&= x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1\right) \\
&= 1-(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1-\sqrt{(1-x)(1+x)} = 1-\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Pour $x=0$, tous les termes de la somme sont nuls, donc l'égalité est bien vérifiée. Enfin, pour $x=1$, les $\{T=n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ formant un système complet d'évènements, on a : $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=n) = 1$ et donc l'égalité est encore vérifiée. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=n)x^n = 1-\sqrt{1-x^2}.}$$

22. Considérons la fonction $\varphi : x \in]-1,1[\mapsto 1-\sqrt{1-x^2}$ et déterminons son développement en série entière ce qui nous donnera, d'après la question précédente, le résultat en identifiant les coefficients. La fonction φ est dérivable et : $\forall x \in]-1,1[,\ \varphi'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Son développement en série entière est donc :

$$\varphi'(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^{2n+1}.$$

Par intégration on obtient donc :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{4^{n-1}}\frac{x^{2n}}{2n}.$$

Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{\left((n-1)!\right)^2} = \frac{\frac{(2n)!}{(2n-1)(2n)}}{\frac{(n!)^2}{n^2}} = \frac{(2n)!n^2}{(n!)^2(2n-1)(2n)} = \binom{2n}{n}\frac{n}{2(2n-1)},$$

donc :

$$\frac{\binom{2n-2}{n-1}}{4^{n-1}}\frac{1}{2n} = \binom{2n}{n}\frac{n}{2(2n-1)} \times \frac{1}{4^{n-1}}\frac{1}{2n} = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n(2n-1)}.$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(T=2n) = \frac{1}{2n-1}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.}$$