Concours Communs Polytechniques 2004

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 2

Préliminaires

1. En notant x_i et $m_{i,j}$ les coefficients des matrices X et M, nous avons :

$$||MX||_\infty = \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^n m_{i,j}x_j\right| \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |m_{i,j}|\,|x_j| \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n \frac{||M||}{n}\,||X||_\infty = ||M||\,||X||_\infty.$$

2.a) L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ (x_1,\ldots,x_d) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^d x_k B_k \end{array}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel ; comme $\mathcal{N}$ est l'image par cet isomorphisme de la norme $||\ ||_\infty$ de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathcal{M}$.

2.b) $\mathcal{N}$ et la restriction de $||\ ||$ à $\mathcal{M}$ sont deux normes équivalentes sur $\mathcal{M}$ (les normes d'un espace de dimension finie sont toutes équivalentes) : il existe donc a et b réels strictement positifs tels que $a||M|| \le \mathcal{N}(M) \le b||M||$ pour tout $M \in \mathcal{M}$.

2.c) D'après les inégalités précédentes, M_p tend vers 0 dans $(M_n(\mathbb{R}), ||\ ||)$ si et seulement si M_p tend vers 0 dans $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Comme l'application définie à la question 2.a) est une isométrie, cette condition est elle-même équivalente à la convergence de $(x_p(1),\ldots,x_p(d))$ vers 0 dans $(\mathbb{R}^d, ||\ ||_\infty)$, ce qui donne bien le résultat demandé.

I - Une relation d'équivalence sur C_I^∞

3.a) Soit $x \in I$. Comme f est de classe C^ℓ sur $[\lambda, x]$, on peut lui appliquer le théorème de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}(x-\lambda)^k + \int_\lambda^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}f^{(\ell)}(u)\,\mathrm{d}u$$

ce qui est l'égalité demandée, puisque $f^{(k)}(\lambda) = 0$ pour k compris entre 0 et $\ell-1$.

3.b) En effectuant le changement de variable $u = (1-t)\lambda + tx$ dans l'intégrale précédente, nous obtenons :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\ell-1}(x-\lambda)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}f^{(\ell)}((1-t)\lambda+tx)(x-\lambda)\,\mathrm{d}t = (x-\lambda)^l h(x)$$

en posant $h(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}f^{(\ell)}((1-t)\lambda+tx)\,\mathrm{d}t$ pour tout x de I.

Montrons par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}_n : h \text{ est de classe } C^n \text{ sur } I \text{ et } \forall\, x \in I,\ h^{(n)}(x) = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}f^{(\ell+n)}((1-t)\lambda+tx)\,\mathrm{d}t.$$

- Comme l'application $(t,x) \mapsto \dfrac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}((1-t)\lambda + tx)$ est continue sur $[0,1] \times I$, h est continue sur I (théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale sur un segment) : $\mathcal{P}_0$ est donc vérifiée.

- Soit $n \geq 0$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vérifiée. Notons, pour $(t,x) \in [0,1] \times I$:

  $$\varphi(t,x) = \frac{t^n(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell+n)}((1-t)\lambda + tx)$$

  L'application φ est continue sur $[0,1] \times I$, dérivable par rapport à x sur $[0,1] \times I$ et

  $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : (t,x) \longmapsto \frac{t^{n+1}(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell+n+1)}((1-t)\lambda + tx)$$

  est continue sur $[0,1] \times I$. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale s'applique : $h^{(n)}$ est de classe C^1 sur I, donc h est de classe C^{n+1} sur I, avec

  $$\forall\, x \in I,\ h^{(n+1)}(x) = \int_0^1 \frac{t^{n+1}(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell+n+1)}((1-t)\lambda + tx)\, \mathrm{d}t$$

L'hypothèse de récurrence est donc héréditaire et h est de classe C^∞ sur I.

4.a) La formule de Leibniz donne, pour $k \in \mathbb{N}$, $(f-g)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Pi_A^{(i)} h^{(k-i)}$. Pour $j \in \{1, \ldots, r\}$ et $k \in \{0, \ldots, m_j - 1\}$, nous avons donc :

$$f^{(k)}(\lambda_j) - g^{(k)}(\lambda_j) = (f-g)^{(k)}(\lambda_j) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \underbrace{\Pi_A^{(i)}(\lambda_j)}_{\substack{=0 \text{ car} \\ i \leq k \leq m_j - 1}} h^{(k-i)}(\lambda_j) = 0$$

ce qui est la définition de $f \underset{A}{\equiv} g$.

4.b) Montrons par récurrence sur r la propriété :

> $\mathcal{H}_r$: si f est un élément de C_I^∞, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont r éléments distincts de I et si $m_1, \ldots, m_r$ sont des entiers naturels non nuls tels que :
>
> $$\forall\, j \in \{1, \ldots, r\},\ \forall\, k \in \{0, \ldots, m_j - 1\},\ f^{(k)}(\lambda_j) = 0$$
>
> alors il existe $h \in C_I^\infty$ tel que
>
> $$\forall\, x \in I,\ f(x) = \prod_{j=1}^{r} (x - \lambda_j)^{m_j}\, h(x).$$

Quand $r = 0$, il suffit de choisir $h = f$. Soit ensuite $r \geq 0$ et supposons la propriété démontrée au rang r. On suppose ensuite que f, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}$, $m_1, \ldots, m_r, m_{r+1}$ sont donnés, vérifiant les hypothèses de la propriété $\mathcal{H}_{r+1}$. En appliquant $\mathcal{H}_r$, on sait qu'il existe $h_1 \in C_I^\infty$ tel que :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = \underbrace{\prod_{j=1}^{r} (x - \lambda_j)^{m_j}}_{= P(x)}\ h_1(x).$$

En posant $\lambda = \lambda_{r+1}$ et $\ell = m_{r+1}$, la formule de Leibniz donne :

$$\forall\, k \in \{0, \ldots, \ell - 1\},\ 0 = f^{(k)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P^{(k-i)}(\lambda) h_1^{(i)}(\lambda),$$

ce qui s'écrit sous forme d'un système linéaire :

$$\begin{cases} P(\lambda)h_1(\lambda) = 0 \\ P'(\lambda)h_1(\lambda) + P(\lambda)h_1'(\lambda) = 0 \\ P''(\lambda)h_1(\lambda) + 2P'(\lambda)h_1'(\lambda) + P(\lambda)h_1''(\lambda) = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\ P^{(\ell-1)}(\lambda)h_1(\lambda) + \cdots + \binom{\ell-1}{\ell-2} P'(\lambda)h_1^{(\ell-2)}(\lambda) + P(\lambda)h_1^{(\ell-1)}(\lambda) = 0 \end{cases}$$

Comme λ est distinct des $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $P(\lambda)$ est non nul : en résolvant ce système triangulaire, nous obtenons donc $h_1(\lambda) = h_1'(\lambda) = \ldots = h_1^{(\ell-1)}(\lambda) = 0$. La question **3.** assure alors l'existence de h dans C_I^∞ tel que $h_1(x) = (x - \lambda)^\ell h(x)$ pour tout $x \in I$, ce qui donne la décomposition cherchée :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = \left(\prod_{j=1}^{r+1} (x - \lambda_j)^{m_j} \right) h(x)$$

Si $f \underset{A}{\equiv} g$, il suffit alors d'appliquer la propriété $\mathcal{H}_r$ à la fonction $f - g$: il existe h dans C_I^∞ tel que $f = g + h\Pi_A$.

5. C'est une application directe du cours sur les polynômes :

$$\begin{aligned} P \underset{A}{\equiv} Q &\iff \forall\, j \in \{1, \ldots, r\},\ \lambda_j \text{ est racine d'ordre au moins } m_j \text{ de } P - Q \\ &\iff \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{m_j} \text{ divise } P - Q \\ &\iff \exists\ H \in \mathbb{R}[X],\ P = Q + H\Pi_A \end{aligned}$$

On peut aussi dire que (2) $\Longrightarrow$ (1) d'après le **4.a)**, puis remarquer que dans le **3.**, on a $h \in \mathbb{R}[X]$ quand $f \in \mathbb{R}[X]$: il suffit donc d'affiner la preuve du **4.b)** pour obtenir (1) $\Longrightarrow$ (2).

II - Définition de la matrice $f(A)$

6. φ est clairement linéaire. D'autre part, si P est élément de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$, on a $P \underset{A}{\equiv} 0$: le **5.** prouve donc que $P = H\Pi_A$ avec $H \in \mathbb{R}[X]$, soit $P = 0$ car P est de degré strictement plus petit que celui de Π_A. Ainsi, φ est injective ; comme $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ et $\mathbb{R}^m$ ont même dimension finie, φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^m$.

7. On a, pour $P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$:

$$f \underset{A}{\equiv} P \iff \varphi(P) = \left(\left(f^{(k_1)}(\lambda_1) \right)_{0 \le k_1 \le m_1 - 1}, \ldots, \left(f^{(k_r)}(\lambda_r) \right)_{0 \le k_r \le m_r - 1} \right).$$

Il existe donc un unique polynôme P_f vérifiant les propriété imposée : ce polynôme est l'image réciproque de $\left(\left(f^{(k_1)}(\lambda_1) \right)_{0 \le k_1 \le m_1 - 1}, \ldots, \left(f^{(k_r)}(\lambda_r) \right)_{0 \le k_r \le m_r - 1} \right)$ par la bijection φ.

8. Comme f et P_f sont deux polynômes tels que $f \underset{A}{\equiv} P_f$, il existe d'après la question **5.** un polynôme H tel que $f = P_f + H\Pi_A$. Le calcul polynômial habituel donne alors

$$\sum_{k=0}^{N} a_k A^k = P_f(A) + H(A)\Pi_A(A) = P_f(A)$$

puisque $\Pi_A(A) = 0$. Ainsi, la notation $f(A)$ n'est pas ambiguë : quand f est un polynôme, la "nouvelle" définition de $f(A)$ coïncide avec l'"ancienne" définition.

9.a) Le polynôme caractéristique de A est $(X-1)^2$, donc Π_A divise $(X-1)^2$. Comme A est distincte de la matrice identité, $\Pi_A = (X-1)^2$.

9.b) Pour f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, P_f est le polynôme $f(1) + f'(1)(X-1)$. Nous obtenons donc :

(1) pour $f(x) = ax + b$, $P_f = f$ donc $f(A) = aA + bI_2 = \begin{pmatrix} 5a+b & -4a \\ 4a & -3a+b \end{pmatrix}$;

(2) pour $f(x) = \sin(\pi x)$, $f(1) = 0$ et $f'(1) = -\pi$ donc $f(A) = -\pi\,(A - I_2) = 4\pi \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) pour $f(x) = (x-1)^2 g(x)$, $f(1) = f'(1) = 0$ donc $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

III - Le calcul systématique de $f(A)$

10. On a vu que $P_f = \varphi^{-1}\left(f(\lambda_1), f'(\lambda_1), \ldots, f^{(m_1-1)}(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_r), f'(\lambda_r), \ldots, f^{(m_r-1)}(\lambda_r)\right)$. Par linéarité de φ^{-1}, et en notant $(e_1, \ldots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$, nous avons donc :

$$\begin{aligned} P_f \;=\; & f(\lambda_1)\varphi^{-1}(e_1) + \cdots + f^{(m_1-1)}(\lambda_1)\varphi^{-1}(e_{m_1}) \\ & + f(\lambda_2)\varphi^{-1}(e_{m_1+1}) + \cdots + f^{(m_2-1)}(\lambda_2)\varphi^{-1}(e_{m_1+m_2}) \\ & \quad \ddots \\ & + f(\lambda_r)\varphi^{-1}(e_{m_1+\cdots+m_{r-1}+1}) + \cdots + f^{(m_r-1)}(\lambda_r)\varphi^{-1}(e_{m_1+\cdots+m_r}) \end{aligned}$$

Nous obtenons la décomposition demandée en posant :

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, r\},\ \forall\, k \in \{0, \ldots, m_j - 1\},\ Q_{j,k} = \varphi^{-1}(e_{m_1+\cdots+m_{j-1}+k+1}).$$

Supposons qu'il existe une autre famille $\widetilde{Q}_{j,k}$ vérifiant la propriété demandée. Pour $j_0 \in \{1, \ldots, r\}$ et $k_0 \in \{0, \ldots, m_{j_0} - 1\}$, choisissons alors $f = Q_{j_0,k_0}$. Comme f est un polynôme de degré au plus m, $P_f = f$ et la décomposition de P_f donne :

$$Q_{j_0,k_0} = f = P_f = \sum_{1\le j\le r}\ \sum_{0\le k\le m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j)\widetilde{Q}_{j,k} = \widetilde{Q}_{j_0,k_0}$$

car $f^{(k)}(\lambda_j) = Q^{(k)}_{j_0,k_0}(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j_0 \text{ et } k = k_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Il existe donc une et une seule famille $Q_{j,k}$ vérifiant

$$\forall\, f \in C^\infty_I,\ P_f = \sum_{1\le j\le r}\ \sum_{0\le k\le m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k}.$$

Remarque : la famille $(Q_{j,k})$ est la base duale (ou préduale, ou antéduale selon les goûts) associée à la base de $(\mathbb{R}_{m-1}[X])^*$ constituée par les formes linéaires :

$$u_{j,k} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{m-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P^{(k)}(\lambda_j) \end{array}$$

11. Considérons l'ensemble $\mathcal{M} = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$. $\mathcal{M}$ est clairement un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, et la famille $(A^0, A^1, \ldots, A^{m-1})$ est une base de $\mathcal{M}$:

- la famille est libre car si $\alpha_0 A^0 + \cdots + \alpha_{m-1}A^{m-1} = 0$, le polynôme $\alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{m-1}X^{m-1}$ est divisible par Π_A qui est de degré m : ceci impose à tous les α_i d'être nuls ;
- pour $B = P(A) \in \mathcal{M}$, on a $B = R(A)$ ou R est le reste dans la division euclidienne de P par Π_A, et donc B est combinaison linéaire de la famille $(A^0, A^1, \ldots, A^{m-1})$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, nous pouvons ensuite écrire :

$$P(A) = P_P(A) = \left(\sum_{1 \le j \le r} \ \sum_{0 \le k \le m_j - 1} P^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k} \right)(A) = \sum_{1 \le j \le r} \ \sum_{0 \le k \le m_j - 1} P^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}.$$

Ceci prouve que la famille $(Z_{j,k})$ engendre $\mathcal{M}$: comme son cardinal m est égal à la dimension de $\mathcal{M}$, cette famille est une base de $\mathcal{M}$ et c'est en particulier une famille libre de $M_n(\mathbb{R})$.

D'autre part, pour f élément de C_I^∞ :

$$f(A) = \left(\sum_{1 \le j \le r} \ \sum_{0 \le k \le m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k} \right)(A) = \sum_{1 \le j \le r} \ \sum_{0 \le k \le m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}.$$

12.a) Nous avons dans cet exemple $r = 1$ et $m_1 = 2$: le résultat découle donc de la question **11.**, avec $Z_1 = Z_{1,0}$ et $Z_2 = Z_{1,1}$.

12.b) Avec $f(x) = 1$, nous obtenons $I_2 = f(A) = Z_1$; avec $f(x) = x$, nous avons cette fois $A = f(A) = Z_1 + Z_2$, soit

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ Z_2 = A - I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

12.c) Nous obtenons donc :

- avec $f(x) = x^{2004}$ et $I = \mathbb{R}$:

$$A^{2004} = f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2 = Z_1 + 2004 Z_2 = \begin{pmatrix} 8017 & -8016 \\ 8016 & -8015 \end{pmatrix}.$$

- avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $I =]0, +\infty[$:

$$\sqrt{A} = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2 = Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- avec $f(x) = x^\alpha$ et $I =]0, +\infty[$:

$$\sqrt{A} = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2 = Z_1 + \alpha Z_2 = \begin{pmatrix} 1 + 4\alpha & -4\alpha \\ 4\alpha & 1 - 4\alpha \end{pmatrix}.$$

13.a) Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2(X+1)$ donc Π_A peut être égal soit à $X^2(X+1)$, soit à $X(X+1)$. Comme $A(A+I_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, $\Pi_A = X^2(X+1)$.

Comme Π_A a une racine double, A n'est pas diagonalisable (ni sur $\mathbb{R}$, ni sur $\mathbb{C}$).

13.b) Dans cet exemple, $r = 2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $m_1 = 2$ et $m_2 = 1$. On en déduit donc :

$$\forall\, f \in C^\infty_{\mathbb{R}},\ f(A) = f(0)Z_{1,0} + f'(0)Z_{1,1} + f(-1)Z_{2,0}.$$

Avec $f\ :\ x \mapsto x^2$, nous obtenons $A^2 = Z_{2,0}$, soit $Z_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Avec $f\ :\ x \mapsto x(1+x)$, nous obtenons $A(I_2 + A) = Z_{1,1}$, soit $Z_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Enfin, $f\ : x \mapsto 1 + x$ donne $I_2 + A = Z_{1,0} + Z_{1,1}$, soit $Z_{1,0} = I_2 - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

IV - Un calcul fonctionnel sur la matrice A

14.a) On a $\alpha P_f, P_f + P_g \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ et, pour $j \in \{1, \ldots, r\}$ et $k \in \{0, \ldots, m_j - 1\}$:

$$\begin{cases} (\alpha f)^{(k)}(\lambda_j) = \alpha f^{(k)}(\lambda_j) = \alpha P_f^{(k)}(\lambda_j) = (\alpha P_f)^{(k)}(\lambda_j) \\ (f+g)^{(k)}(\lambda_j) = f^{(k)}(\lambda_j) + g^{(k)}(\lambda_j) = P_f^{(k)}(\lambda_j) + P_g^{(k)}(\lambda_j) = (P_f + P_g)^{(k)}(\lambda_j) \end{cases}$$

donc $P_{\alpha f} = \alpha P_f$ et $P_{f+g} = P_f + P_g$.

14.b) Pour $j \in \{1, \ldots, r\}$ et $k \in \{0, \ldots, m_j - 1\}$, nous avons :

$$\begin{aligned} (P_f P_g)^{(k)}(\lambda_j) &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} P_f^{(\ell)}(\lambda_j) P_g^{(k-\ell)}(\lambda_j) \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} f^{(\ell)}(\lambda_j) g^{(k-\ell)}(\lambda_j) \\ &= (fg)^{(k)}(\lambda_j) \\ &= P_{fg}^{(k)}(\lambda_j) \end{aligned}$$

donc $P_f P_g \underset{A}{\equiv} P_{fg}$. D'après la question **5.**, il existe $H \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_{fg} = P_f P_g + H\Pi_A$.

15.a) Cela découle des propriétés ci-dessus :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, f, g \in C^\infty_I,\ \begin{cases} S(\alpha f) = P_{\alpha f}(A) = (\alpha P_f)(A) = \alpha P_f(A) = \alpha S(f) \\ S(f+g) = P_{f+g}(A) = (P_f + P_g)(A) = P_f(A) + P_g(A) = S(f) + S(g) \\ S(fg) = P_{fg}(A) = (P_f P_g + \Pi_A H)(A) = P_f(A) P_g(A) = S(f)S(g) \end{cases}$$

où H est le polynôme donné par le **14.b)**.

15.b) Un élément f de C_I^∞ est dans le noyau de S si et seulement si $P_f(A) = f(A) = 0$, i.e. si et seulement si P_f est un multiple de Π_A, donc si et seulement si $P_f = 0$ (car P_f est de degré strictement plus petit que Π_A). Les éléments du noyaux sont donc les f tels que $f \underset{A}{\equiv} 0$, i.e. les f qui admettent chaque λ_i pour racine d'ordre au moins m_i.

16.a) Comme S est un morphisme, $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = (S(\cos))^2 + (S(\sin))^2 = S(\cos^2 + \sin^2) = S(1) = 1(A) = I_n$.

16.b) En notant $Id : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$, on a $(\sqrt{A})^2 = (S(f_1))^2 = S(f_1^2) = S(Id) = X(A) = A$.

Enfin, $\dfrac{1}{A} A = S(f_2)S(Id) = S(f_2 Id) = S(1) = 1(A) = I_n$ donc $\dfrac{1}{A} = A^{-1}$.

17. $\mathcal{M}_A$ est l'image du morphisme d'algèbre S : c'est donc une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{R})$. D'autre part, C_I^∞ étant commutatif, $\mathcal{M}_A$ l'est également. Comme on l'a vu à la question **11.**, cette algèbre est de dimension m et la famille $(Z_{i,j})$ en est une base.

18. Si $B \in \mathcal{M}_A \cap GL_n(\mathbb{R})$, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_A & \longrightarrow & \mathcal{M}_A \\ C & \longmapsto & BC \end{array}$ est linéaire et injective (car B est inversible, donc simplifiable). $\mathcal{M}_A$ étant de dimension finie, cet endomorphisme est également surjectif : comme la matrice identité est élément de $\mathcal{M}_A$, il existe $C \in \mathcal{M}_A$ telle que $BC = I_n$, ce qui prouve que $B^{-1} = C \in \mathcal{M}_A$.

19. Si $f(A)$ est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$, son inverse est élément de $\mathcal{M}_A$ d'après la question précédente. Il existe donc $g \in C_I^\infty$ tel que $f(A)g(A) = I_n$, ce que l'on peut écrire $S(fg - 1) = 0$. On en déduit que $fg - 1$ est dans le noyau de S, i.e. que $fg \underset{A}{\equiv} 1$. En particulier, on a $f(\lambda_i)g(\lambda_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et les $f(\lambda_i)$ sont tous non nuls.

Réciproquement, supposons que les $f(\lambda_i)$ sont tous non nuls. Si $(a_{j,k})_{\substack{1 \le j \le r \\ 0 \le k \le m_i - 1}}$ est une famille quelconque, il existe un et un seul polynôme g de degré au plus $m - 1$ tel que :

$$\forall\, j \in \{1, \dots, r\},\ \forall\, k \in \{0, \dots, m_j - 1\},\ g^{(k)}(\lambda_j) = a_{j,k}.$$

Pour avoir $f(A)g(A) = I_n$, il faut et il suffit que l'on ait $fg \underset{A}{\equiv} 1$, i.e. que l'on ait :

$$\forall\, j \in \{1, \dots, r\},\ \forall\, k \in \{0, \dots, m_j - 1\},\ (fg)^{(k)}(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour chaque j, en appliquant la formule de Leibniz, nous obtenons ainsi un système triangulaire d'inconnues $(a_{j,0}, a_{j,1}, \dots, a_{j,m_j - 1})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à $f(\lambda_j)$, qui est non nul. Ces systèmes linéaires ont donc une unique solution : il existe un (et un seul) choix des $(a_{j,k})$ tel que le polynôme g associé vérifie $f(A)g(A) = I_n$, ce qui prouve que $f(A)$ est inversible (dans $\mathcal{M}_A$).

20. On a $\Lambda_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$. D'autre part, pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcll} \lambda \in \Lambda_{f(A)} & \iff & f(A) - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{R}) & \\ & \iff & (f - \lambda)(A) \notin GL_n(\mathbb{R}) & \\ & \iff & \exists j \in \{1, \dots, r\},\ (f - \lambda)(\lambda_j) = 0 & \quad \text{(d'après \textbf{19.})} \\ & \iff & \lambda \in \{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_r)\} & \end{array}$$

donc $\Lambda_{f(A)} = f(\Lambda_A)$.

V - Application à la résolution d'un système différentiel

21. On a vu à la question **11.** que $(Z_{j,k})$ est une base de $\mathcal{M}_A$. D'après la question **2.c)**, une suite de matrice

$$M_p = \sum_{1\leq j\leq r}\ \sum_{0\leq k\leq m_j-1} x_p(j,k)Z_{j,k}$$

converge vers une matrice

$$M = \sum_{1\leq j\leq r}\ \sum_{0\leq k\leq m_j-1} x(j,k)Z_{j,k}$$

si et seulement si $x_p(j,k)$ converge vers $x(j,k)$ pour tout couple (j,k). On en déduit que

$$f_p(A) = \sum_{1\leq j\leq r}\ \sum_{0\leq k\leq m_j-1} f_p^{(k)}(\lambda_j)Z_{j,k}$$

converge vers

$$f(A) = \sum_{1\leq j\leq r}\ \sum_{0\leq k\leq m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j)Z_{j,k}$$

si et seulement si pour chaque (j,k), $f_p^{(k)}(\lambda_j)$ converge vers $f^{(k)}(\lambda_j)$ quand p tend vers l'infini.

22. Pour éliminer la maladresse de l'énoncé qui pourrait conduire à confondre le f_p du **21.** et le f_t de la question **22.**, notons simplement $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{tx}$ et posons :

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ f_p\ : x \mapsto \sum_{\ell=0}^{p} \frac{t^\ell}{\ell\,!}x^\ell.$$

Le cours sur les séries entières nous apprend que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_p^{(k)}(x) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} f^{(k)}(x)$. On en déduit en particulier que la suite (f_p) “converge vers f sur le spectre de A”. D'après la question précédente, $f_p(A)$ converge vers $f(A)$ quand p tend vers l'infini, ce qui s'écrit :

$$f(A) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell}{\ell\,!}A^\ell.$$

23. On sait que la solution générale du système différentiel est $A(t) = \exp(tA)X_0$ où X_0 est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. D'après la question **13.**, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= f_t(0)Z_{1,0} + f_t'(0)Z_{1,1} + f_t(-1)Z_{2,0} = Z_{1,0} + tZ_{1,1} + \mathrm{e}^{-t}Z_{2,0}\\ &= \begin{pmatrix} 1+t & -t & t\\ 1+t-\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t}-t & t\\ 1-\mathrm{e}^{-t} & +\mathrm{e}^{-t}-1 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et la solution générale du système est :

$$\begin{cases} x = a(1+t) - bt + ct\\ y = a(1+t-\mathrm{e}^{-t}) + b(\mathrm{e}^{-t}-t) + ct\\ z = a(1-\mathrm{e}^{-t}) + b(\mathrm{e}^{-t}-1) + c\end{cases}$$

avec a, b et c réels quelconques.