

Partie I.

1) Calcul de u_n

$$u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t+n-n}{t+n} dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \left(1 - \frac{n}{t+n}\right) dt = \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}.$$

La série de terme général u_n est convergente car $u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n)\right)$ et

$$\text{donc } u_n \approx \frac{1}{2n^2} \text{ qd } n \rightarrow +\infty \text{ et Riemann assure la convergence.}$$

2) Calcul de S_n

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{n+1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

Mais alors $S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) - \ln \frac{n+1}{n}$ et puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{n} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = S$$

3) On peut écrire: $\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t}{n+1} dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t}{n} dt$ soit $\frac{1}{2n(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2n(n-1)}$ de sorte

qu'en ne retenant que les termes extrêmes de ces inégalités on obtient:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \leq u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \text{ inégalités valables pour } n \geq 2.$$

$S - S_n = R_n$ reste d'indice n de la série de terme général u_n . On a $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ d'où

$$\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leq R_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \text{ soit } \frac{1}{2(n+1)} \leq S - S_n \leq \frac{1}{2n}$$

4) Pour garantir $|S - S_n| \leq 10^{-2}$, la formule précédente suggère de prendre n ; $\frac{1}{2n} \leq 10^{-2}$ soit $n \geq 50$

Pour garantir $|S - S_n| \leq 10^{-6}$, il faut cette fois $n \geq 500000$ avec cette même formule.

On peut cependant améliorer nettement les choses en remarquant que:

$$-\frac{1}{4n(n+1)} \leq S - S_n - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} \right) \leq \frac{1}{4n(n+1)} \text{ d'où en prenant pour valeur approchée de } S \text{ la}$$

valeur $S_n + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right)$ on obtient: S à 10^{-2} près pour $\frac{1}{4n(n+1)} \leq 10^{-2}$ soit $n \geq 5$ et

$$S \text{ à } 10^{-6} \text{ près pour } \frac{1}{4n(n+1)} \leq 10^{-6} \text{ soit } n \geq 500$$

Commentaire: La 1^{ère} évaluation n'est pas performante, la 2^{ème} est acceptable pour l'approximation à 10^{-2} près, elle l'est beaucoup moins pour l'approximation à 10^{-6} près.

Partie II.

Soit n fixé supérieur ou égal à 1. $A(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt$ et $B(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$

1) Domaine de définition de A et B .

- Pour A . La fonction $t \rightarrow \frac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbf{R}$ à condition de lui donner la valeur 1 en 0. Elle est donc intégrable sur tout segment de $\mathbf{R}$, et $\text{Def}(A) = \mathbf{R}$.
- Pour B . La fonction $t \rightarrow \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$, et au $V(0)$, $\frac{e^{-t}}{t} \approx \frac{1}{t}$ de sorte que si 0 appartient à l'intervalle $[x, +\infty[$, l'intégrale est généralisée en 0, et est divergente. Il faut donc avoir $x > 0$ et alors le seul problème d'intégrale généralisée est en $+\infty$. Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \left(\frac{e^{-t}}{t} \right) = 0$ assure que $\frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{1}{t^2}$ au $V(+\infty)$ et Riemann donne la convergence. $\text{Def}(B) =]0, +\infty[$.

A et B sont C^∞ sur leurs domaines de définition respectifs. En effet:

- $t \rightarrow \frac{1-e^{-t}}{t}$ étant continue sur $\mathbf{R}$, A est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée $A'(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$. Cette fonction est C^∞ sur $\mathbf{R}$ car elle est la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!}$ de rayon de convergence infini.
 - $B(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ soit encore $B(x) = -\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Or $t \rightarrow \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc B est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $B'(x) = \frac{-e^{-x}}{x}$, fonction C^∞ sur $]0, +\infty[$ comme produit de 2 fonctions C^∞ sur $]0, +\infty[$.
-

2) Montrons pour $u \in [0,1]$ que $\int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u} du = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Notons tout de suite que $\frac{1-(1-u)^n}{u} \approx n$ au $V(0)$ et qu'il n'y a donc pas de problème d'intégrale généralisée en 0. On notera f la fonction précédente prolongée par n en 0. On peut alors écrire:

$$f(u) = \begin{cases} n & \text{pour } u = 0 \\ \frac{1-(1-u)^n}{1-(1-u)} = 1 + (1-u) + \dots + (1-u)^{n-1} & \text{pour } u \neq 0 \end{cases} \quad \text{de sorte que l'on peut même dire}$$

que: $\forall u \in [0,1]$, $f(u) = 1 + (1-u) + \dots + (1-u)^{n-1}$ et donc

$$\int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u} du = 1 - \left[\frac{(1-u)^2}{2} \right]_0^1 - \dots - \left[\frac{(1-u)^n}{n} \right]_0^1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u} du - \int_1^n \frac{dt}{t} \quad \text{Dès lors posons } u = \frac{t}{n} \text{ dans la 1}^{\text{ère}} \text{ intégrale.}$$

$$\int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u} du = \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{\frac{t}{n}} \frac{1}{n} dt = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t} dt + \int_1^n \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t} dt \quad \text{et par suite:}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t} dt - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t} dt.$$

3)a) Montrons pour $u \in [0,1]$ que $(1-u^2)e^{-u} \leq 1-u \leq e^{-u}$

- La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 donne: $e^{-u} = 1-u + \frac{u^2}{2}e^{-\theta}$ avec $0 < \theta < u$ ceci assure

l'inégalité de droite demandée $1-u \leq e^{-u}$.

- L'inégalité de gauche est bien vérifiée pour $u=1$, et après division des 2 membres par $1-u > 0$ elle est équivalente à $(1+u)e^{-u} \leq 1$ soit encore à $e^u \geq 1+u$ inégalité assurée par le théorème des accroissements

finis: $\frac{e^u - 1}{u} = e^\theta > 1$ avec $0 < \theta < u$. On a donc bien

$$(1-u^2)e^{-u} \leq 1-u \leq e^{-u} \text{ pour } u \in [0,1].$$

b) Montrons pour $\alpha \in [0,1]$ que $(1-\alpha)^n \geq 1-n\alpha$.

- Pour $\alpha = 0$ l'inégalité est vraie.
- Pour $\alpha \neq 0$ l'inégalité est équivalente à $\frac{(1-\alpha)^n - 1}{\alpha} \geq -n$. Or si on note $g(\alpha) = (1-\alpha)^n$, le

théorème des accroissements finis donne $\frac{g(\alpha) - g(0)}{\alpha} = g'(\theta)$ avec $0 < \theta < \alpha$ soit ici

$$\frac{(1-\alpha)^n - 1}{\alpha} \geq -n(1-\theta)^{n-1} \quad \text{et comme } 0 \leq (1-\theta)^{n-1} \leq 1 \text{ on en déduit } -n(1-\alpha)^{n-1} \geq -n \text{ et donc}$$

$$(1-\alpha)^n \geq 1-n\alpha \text{ pour } \alpha \in [0,1].$$

c) Montrons pour $t \in [0,n]$ que $0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n}e^{-t}$

$t \in [0,n] \Rightarrow \frac{t}{n} \in [0,1]$ et par suite:

- a) assure que $1 - \frac{t}{n} \leq e^{-\frac{t}{n}}$ d'où, en élevant à la puissance n , (tout est ≥ 0) $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$ c'est à dire

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \text{ ce qui est l'inégalité de gauche demandée.}$$

- a) assure toujours que $\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)e^{-\frac{t}{n}} \leq 1 - \frac{t}{n}$ d'où, en élevant à la puissance n ,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \text{ et d'après b) } \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \frac{t^2}{n^2} \text{ permet d'assurer que}$$

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \text{ soit encore } e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t} \text{ ce qui est l'inégalité de droite demandée.}$$

$$\text{Pour } t \in [0, n], \quad 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

d) On a que $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt \right]$ d'après 2)

- D'après c), on peut écrire pour $t \in [0, 1]$ $0 \leq \frac{e^{-t} - 1}{t} + \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} \leq \frac{t}{n} e^{-t}$ soit encore

$$0 \leq \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} - \frac{1 - e^{-t}}{t} \leq \frac{t}{n} e^{-t} \text{ et en intégrant entre 0 et 1, on obtient:}$$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt - A(1) \leq \frac{1}{n} \int_0^1 t e^{-t} dt \text{ ce qui assure que } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt = A(1)$$

- Toujours d'après c), on a pour $t \geq 1$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} - \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} \leq \frac{t}{n} e^{-t}$ et en intégrant entre 1 et n , on obtient:

$$0 \leq \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt \leq \frac{1}{n} \int_1^n t e^{-t} dt \text{ soit à fortiori } 0 \leq \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt \leq \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} t e^{-t} dt$$

$$\text{ce qui assure } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = B(1)$$

Conclusion: $S = A(1) - B(1)$

Partie III.

- 1)** Soit $x > 0$. Calcul de $A(x) - B(x) - A(1) + B(1)$.

$$A(x) - B(x) - A(1) + B(1) = \int_1^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \quad \text{d'où}$$

pour $x > 0$ $S = A(x) - B(x) - \ln x$

2)a) Montrons que pour $x > 0$ $0 \leq B(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

• $B(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ donc $B(x) \geq 0$ car $\frac{e^{-t}}{t} \geq 0$ sur $[x, +\infty[$. L'inégalité de gauche est acquise.

• Par ailleurs on peut écrire $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x}$. L'inégalité de droite est acquise.

$$\text{pour } x > 0 \quad 0 \leq B(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}.$$

b) Cherchons x_0 tel que $x \geq x_0 \Rightarrow B(x) \leq \frac{1}{3}10^{-2}$. La fonction $x \rightarrow \frac{e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ comme produit de 2 fonctions positives décroissantes sur cet intervalle. Cherchons x_0 tel que

$$\frac{e^{x_0}}{x_0} \leq \frac{1}{3}10^{-2} \quad \text{alors pour } x \geq x_0 \text{ on aura } \frac{e^x}{x} \leq \frac{1}{3}10^{-2} \quad \text{et donc } B(x) \text{ aussi.}$$

Par dichotomie appliquée à la quantité $\frac{300}{x}e^{-x}$ comparée à 1, on obtient que $x_0 = 4,26$ est une possibilité.

3)a) On a vu que $\frac{1-e^{-t}}{t}$ est développable en série entière de rayon de convergence infini (cf II1). Son

développement est $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(n+1)!}$. Comme $A(0) = 0$, en intégrant terme à terme on obtient:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n.n!} \quad \text{on a donc } a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}$$

b) Soit $x > 0$ fixé. $\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = \frac{n}{n+1} \frac{x}{n+1} \leq \frac{x}{n} \leq 1$ dès que $n \geq x$.

Pour $n \geq x$, on peut appliquer le résultat concernant la majoration de la valeur absolue du reste d'une série vérifiant le critère des séries alternées et donc:

$$n \geq x \Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$$

4) D'après III1, pour $x > 0$ $S = A(x) - B(x) - \ln x$ s'écrit avec des notations classiques

$$S = A_n(x) + R_n(x) - B(x) - \ln x \quad \text{et donc} \quad |S - (A_n(x) - \ln x)| \leq |R_n(x)| + |B(x)|$$

• Dès lors, choisissons par exemple $x = 5$. $A_n(5) - \ln 5$ sera une valeur approchée de S à 10^{-2} près dès

que $|R_n(5)| \leq \frac{2}{3}10^{-2}$ ce qui est réalisé dès que $\begin{cases} n \geq 5 \\ \frac{5^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} \leq \frac{2}{3}10^{-2} \end{cases} \quad n = 13 \text{ convient.}$

$S = A_{13}(5) - \ln 5$ à 10^{-2} près. Avec cette formule, la machine donne $S \cong 0,58$.

- Rq: Si on avait choisi $x = 4,3$, la valeur de n qui convient est 12. On ne gagne donc pas grand chose sur le nombre de termes à prendre dans la série, et le calcul est sans doute préférable avec $x = 5$ entier.
-
-

Partie IV.

Soient les fonctions: $f:(x,t) \rightarrow e^{-t}t^x$ et $F:x \rightarrow \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$

1) $t \rightarrow e^{-t}t^x$ est continue sur $]0, +\infty[$ pour $x \geq 0$ et sur $]0, +\infty[$ pour $x < 0$, donc localement intégrable sur ces intervalles.

- au $V(+\infty)$ $t^2(e^{-t}t^x) \rightarrow 0$ qd $t \rightarrow +\infty$ et Riemann assure la convergence.
- au $V(0)$ $e^{-t}t^x \approx \frac{1}{t^{-x}}$ et donc il y a convergence pour $-x < 1$ soit $x > -1$.

$$Def(F) =]-1, +\infty[$$

2) Soit a et b tels que $-1 < a < b$. On définit, pour $t > 0$ $\varphi(t) = \begin{cases} t^a e^{-t} & \text{si } t \in]0, 1[\\ t^b e^{-t} & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$

φ est continue sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $[1, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur ces

intervalles. Il reste à vérifier la continuité en 1. Or on a: $\lim_{t \rightarrow 1^-} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} \varphi(t) = \frac{1}{e}$.

φ est continue sur $]0, +\infty[$.

Soit $(x,t) \in [a,b] \times]0, +\infty[$ $t^x \leq t^a$ pour $t \in]0, 1[$

$t^x \leq t^b$ pour $t \in [1, +\infty[$ et donc sur $[a,b] \times]0, +\infty[$ on a

$t^x e^{-t} \leq \varphi(t)$ fonction indépendante de x , continue sur $]0, +\infty[$, et telle que $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge. Le

théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre s'applique.

F est continue sur $[a,b]$ et ce pour tout a et b tels que $-1 < a < b$, donc F est continue sur $]-1, +\infty[$.

3) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t}t^x \ln t$. Comme précédemment sur $[a,b] \times]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq |\ln t| \varphi(t)$

fonction indépendante de x , continue sur $]0, +\infty[$, et telle que $\int_0^{+\infty} |\ln t| \varphi(t)dt$ converge.

Le théorème de dérivation sous le signe $\int$ d'une fonction définie par une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre s'applique.

F est de classe C^1 sur $[a,b]$ et ce pour tout a et b tels que $-1 < a < b$, donc F est C^1 sur $]-1, +\infty[$.

Note pour la convergence de $\int_0^{+\infty} |\ln t| \varphi(t)dt$.

- au $V(+\infty)$ $t^2(|\ln t| \varphi(t)) \rightarrow 0$ et Riemann assure la convergence.

- au $V(0)$ choisissons α tel que $-1 < -\alpha < a$, on a donc $\alpha < 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha (|\ln t| \varphi(t)) = 0$, donc Riemann assure la convergence.

4) On a $F'(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = \int_0^1 e^{-t} \ln t dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$. On intègre alors par parties en posant:

- Dans la 1^{ère} intégrale $\begin{cases} u = \ln t & u' = \frac{1}{t} \\ v' = e^{-t} & v = 1 - e^{-t} \end{cases}$ d'où

$$\int_0^1 e^{-t} \ln t dt = \left[(1 - e^{-t}) \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = -A(1)$$

- Dans la 2^{ème} intégrale $\begin{cases} u = \ln t & u' = \frac{1}{t} \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{cases}$ d'où

$$\int_1^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = \left[-e^{-t} \ln t \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = B(1)$$

$$\text{Donc } F'(0) = -(A(1) - B(1)) = -S$$

5) Soit $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln t dt$.

$t \rightarrow e^{-xt} \ln t$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur cet intervalle.

- au $V(0)$ $e^{-xt} \ln t \approx \ln t$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \ln t = 0$ Riemann assure la convergence.
- au $V(+\infty)$ Il est nécessaire que $x > 0$, sinon $e^{-xt} \ln t \rightarrow +\infty$ et l'intégrale serait divergente. Mais alors pour $x > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 (e^{-xt} \ln t) = 0$ et Riemann assure la convergence.

$$\text{Def}(I) =]0, +\infty[$$

On a $F'(0) = -S = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$. Dans I posons $u = xt$. On a $I(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln \frac{u}{x} du$ soit

$$I(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln u du - \frac{\ln x}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u} du \quad \text{c'est à dire:}$$

$$I(x) = -\frac{S + \ln x}{x} \text{ pour } x > 0.$$