

## MATHÉMATIQUES

(Épreuve commune aux ENS : Lyon et Cachan)

Corrigé de R. Cabane (rcabane@online.fr) et M. Quercia (michel.quercia@prepas.org)

## I. Normes

- 1a)** Soit  $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  alors  $\|Ae_i\| = |\lambda_i|$  d'où  $\|A\| \geq \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$ .  
De plus si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  alors  $\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i x_i|^2 \leq \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)^2 \|x\|^2$  d'où  $\|A\| \leq \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$  et donc  
 $\|A\| = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$ .
- 1b)** Si  $Dx = \lambda x$  alors  $\|Ax\|^2 = \langle x, Dx \rangle = \lambda \|x\|^2$  d'où  $\lambda \geq 0$ .
- 1c)**  $\|A\|^2 = \sup\{\|Ax\|^2; \|x\| = 1\} = \sup\{\langle x, Dx \rangle; \|x\| = 1\} = \max(\mu_1, \dots, \mu_n)$ .
- 1d)**  $A^*A$  est diagonalisable en base orthonormale et le raisonnement de **1a** peut être conduit dans une base orthonormale diagonalisant  $A^*A$ , d'où  $\|A^*A\| = \max\{\mu_j; j = 1, \dots, n\} = \|A\|^2$ .
- 2a)** Soit  $x \neq 0$  tel que  $Dx = \mu_1 x$  et  $r > 0$  tel que  $m((D/r)^{2^\ell}) \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0$ . Comme toutes les normes sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sont équivalentes, chaque coefficient de  $(D/r)^{2^\ell}$  tend vers 0 et  $(D/r)^{2^\ell} x = (\mu_1/r)^{2^\ell} x \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0$  c'est-à-dire  $\mu_1 < r$ .  
Réciproquement, soit  $r > \mu_1$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ ,  $(u_1, \dots, u_n)$  une base orthonormale propre pour  $D$  ( $Du_i = \mu_i u_i$ ) et  $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i \in \{e_1, \dots, e_n\}$ . On a  $(D/r)^{2^\ell} x = \sum_{i=1}^n (\mu_i/r)^{2^\ell} x_i u_i \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0$  donc chaque coefficient de  $(D/r)^{2^\ell}$  tend vers 0 et  $m((D/r)^{2^\ell}) \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0$ .
- 2b)** La question précédente montre que  $\|D\| = m(D)$  si  $D$  est hermitienne.  $A^*A$  est hermitienne donc avec la question **1d** il vient  $m(A)^2 = m(A^*A) = \|A^*A\| = \|A\|^2$ .

## II. Commutants

- 1)**  $\mathcal{S}'$  est manifestement stable par combinaison linéaire et produit et contient  $I$ , c'est donc une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Si  $A \in \mathcal{S}'$  et  $S \in \mathcal{S}$  alors  $A^*S = A^*S^{**} = (S^*A)^* = (AS^*)^* = S^{**}A^* = SA^*$  donc  $A^* \in \mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S}'$  est stable par l'involution  $*$ .
- 2)** Si  $A \in \mathcal{S}$  et  $B \in \mathcal{S}'$  alors  $AB = BA$  donc  $A \in \mathcal{S}''$ . Ceci prouve que  $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}''$  et, en remplaçant  $\mathcal{S}$  par  $\mathcal{S}'$ , que  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}'''$ . L'application *prime* est décroissante pour l'ordre d'inclusion entre sous  $*$ -algèbres de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  donc de  $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}''$  on déduit  $\mathcal{S}' \supset \mathcal{S}'''$  d'où l'égalité. Les autres relations demandées sont alors immédiates.
- 3)** Si  $E$  est invariant par  $\mathcal{S}$ ,  $A \in \mathcal{S}$  et  $x \in \mathbb{C}^n$ , alors  $AP_E x \in E$  donc  $AP_E x = P_E AP_E x$  d'où  $AP_E = P_E AP_E$ . En appliquant cette relation à  $A^* \in \mathcal{S}$  et en remarquant que  $P_E$  est auto-adjoint on a :

$$(P_E A)^* = A^* P_E = P_E A^* P_E = (P_E A P_E)^*$$

d'où  $P_E A = P_E A P_E = AP_E$  et  $P_E \in \mathcal{S}'$ .Réciproquement, si  $P_E \in \mathcal{S}'$ ,  $A \in \mathcal{S}$  et  $x \in E$ , alors  $Ax = AP_E x = P_E Ax \in E$  d'où  $E$  est invariant par  $\mathcal{S}$ .

- 4a)** C'est évident.
- 4b)** On vérifie aisément que  $\Pi(\mathcal{S}) = \{\Pi(A); A \in \mathcal{S}\}$  est une sous  $*$ -algèbre de  $\mathcal{L}(\mathcal{K})$  pour le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{C}^{n^2}$ . D'après **3**, il suffit de prouver que  $\Pi(\mathcal{S})v$  est invariant par  $\Pi(\mathcal{S})$ , ce qui est une évidence.
- 4c)** Soit  $M = (M_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$  avec  $M_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $A \in \mathcal{S}$ . On a  $\Pi(A)M = (AM_{i,j})$  et  $M\Pi(A) = (M_{i,j}A)$  donc  $\Pi(A)$  et  $M$  commutent si et seulement si toutes les matrices  $M_{i,j}$  commutent avec  $A$ . En faisant varier  $A$  dans  $\mathcal{S}$  on obtient :  $M \in \Pi(\mathcal{S})' \iff \forall i, j, M_{i,j} \in \mathcal{S}'$  soit  $\Pi(\mathcal{S})' = \mathcal{M}_n(\mathcal{S}')$ .
- 4d)** Si  $A \in \mathcal{S}''$  et  $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S}')$  alors  $\Pi(A)B = (AB_{i,j}) = (B_{i,j}A) = B\Pi(A)$  d'où l'inclusion demandée.

4e) On doit prouver que  $\Pi(\mathcal{S})v$  est invariant par  $\Pi(\mathcal{S}'')$ , soit :  $P \in \Pi(\mathcal{S}'')$  d'après 3.  
On a :  $P \in \Pi(\mathcal{S}') \stackrel{4b}{=} \mathcal{M}_n(\mathcal{S}') \stackrel{4c}{=} \mathcal{M}_n(\mathcal{S}'') \stackrel{2}{=} (\mathcal{M}_n(\mathcal{S}'))' \stackrel{4d \text{ et décroissance de '}}{\subset} \Pi(\mathcal{S}'')$ , d'où le résultat.

4f) Soit  $B \in \mathcal{S}''$  et  $v = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $\mathbb{C}^n$  :  $\Pi(B)v = \Pi(B)\Pi(I)v \in \Pi(\mathcal{S})v$  donc il existe  $A \in \mathcal{S}$  tel que  $\Pi(B)v = \Pi(A)v$  soit  $Bv_i = Av_i$  pour tout  $i$ . On en déduit  $B = A \in \mathcal{S}$  d'où  $\mathcal{S}'' \subset \mathcal{S}$  et  $\mathcal{S} = \mathcal{S}''$  d'après 2.

5a) Soient  $\mu_1, \dots, \mu_\ell$  les valeurs propres (réelles) de  $A$ , sans répétition, et  $L_1, \dots, L_\ell$  les polynômes de Lagrange associés aux  $\mu_i$  ( $L_i(\mu_j) = \delta_{i,j}$ ). Alors  $X = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i L_i$  (égalité entre polynômes) donc  $A = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i L_i(A) = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i P_i$ . On a  $P_i \in \mathcal{S}$  car  $A \in \mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . De plus,  $L_i^2 \equiv L_i \pmod{(X - \mu_1) \dots (X - \mu_\ell)}$ , donc  $P_i^2 = P_i$  ce qui prouve que  $P_i$  est un projecteur, autoadjoint car polynôme en  $A$  à coefficients réels, donc un projecteur orthogonal.

b) Soit  $A \in \mathcal{S}'$  et  $E$  un sous-espace propre de  $A$  (il en existe puisque le corps de base est  $\mathbb{C}$ ). Comme  $A$  commute avec tous les éléments de  $\mathcal{S}$ ,  $E$  est invariant par  $\mathcal{S}$  et  $E \neq \{0\}$  donc  $E = \mathbb{C}^n$  ce qui implique que  $A$  est une matrice d'homothétie :  $A = \lambda I$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Réciproquement, toute matrice d'homothétie commute avec tout élément de  $\mathcal{S}$ . On a alors  $\mathcal{S} = \mathcal{S}' = \{\lambda I; \lambda \in \mathbb{C}\}' = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Autre méthode :

L'absence de sous-espace invariant non trivial fait que  $\mathcal{S}'$  ne peut contenir de projecteur orthogonal non trivial (3). On prend  $A$  dans  $\mathcal{S}'$ . Comme  $\mathcal{S}'$  est autoadjointe,  $A^*$  et  $A^*A$  sont dans  $\mathcal{S}'$ . On diagonalise cette dernière dans une BON, d'où des projecteurs spectraux qui sont orthogonaux (question précédente). En conséquence, il n'y a qu'un espace propre, soit  $A^*A = 0$  (exclu sauf  $A = 0$ ) ou  $A^*A = \mu I$  et  $A$  est inversible. Mais une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  contenant  $A$  et  $I$  va inclure en général des matrices non inversibles et non nulles de la forme  $A - \mu I$ . La seule solution est que  $\mathcal{S}'$  soit formé de matrices scalaires. On conclut avec  $\mathcal{S} = \mathcal{S}''$ .

### III. Algèbres de Clifford

1a) Pour  $n = 1$  on ordonne  $\mathcal{P} = (\emptyset, \{1\})$  et l'on a :  $\text{Mat}(a_{\{1\}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Pour  $n = 2$  on ordonne  $\mathcal{P} = (\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\})$  et l'on a :  $\text{Mat}(a_{\{1\}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\text{Mat}(a_{\{2\}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1b) Notons  $\alpha$  l'application donnée pour  $a_A^*$  dans l'énoncé et considérons  $B, C \in \mathcal{P}$  :

si  $A \subset B$  et  $A \cap C = \emptyset$  alors  $\langle a_A e_B, e_C \rangle = \delta_{B \setminus A, C} = \delta_{B, C \cup A} = \langle e_B, e_{C \cup A} \rangle = \langle e_B, \alpha(e_C) \rangle$ .

Si  $A \not\subset B$  ou  $A \cap C \neq \emptyset$  on a  $\langle a_A e_B, e_C \rangle = 0 = \langle e_B, \alpha(e_C) \rangle$ .

Ceci suffit à prouver que  $a_A^* = \alpha$ .

1c) Les seules propriétés non évidentes sont la stabilité de  $\mathcal{S}_n$  par produit et l'appartenance de  $I$  à  $\mathcal{S}_n$ .

Pour  $A, B, X \in \mathcal{P}$  :

$$\begin{aligned} a_A a_B e_X &= \begin{cases} e_{(X \setminus B) \setminus A} & \text{si } B \subset X \text{ et } A \subset (X \setminus B) \\ 0 & \text{dans les autres cas ;} \end{cases} \\ a_A^* a_B e_X &= \begin{cases} e_{(X \setminus B) \cup A} & \text{si } B \subset X \text{ et } (X \setminus B) \cap A = \emptyset \\ 0 & \text{dans les autres cas ;} \end{cases} \\ a_A a_B^* e_X &= \begin{cases} e_{(X \cup B) \setminus A} & \text{si } B \cap X = \emptyset \text{ et } A \subset (X \cup B) \\ 0 & \text{dans les autres cas ;} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit  $I = a_{\emptyset}^* a_{\emptyset} \in \mathcal{S}_n$ ,  $a_A a_B = a_{A \cup B}$ ,  $a_A^* a_B^* = (a_B a_A)^* = a_{A \cup B}^*$  et  $a_A a_B^* = a_B^* a_A$  pour tous  $A, B \in \mathcal{P}$  tels que  $A \cap B = \emptyset$ . Si  $A \cap B \neq \emptyset$  on a  $a_A a_B = 0 = a_A^* a_B^*$  et pour  $A, B$  quelconques :

$$a_A a_B^* = a_{A \cap B} a_{A \setminus B} a_{B \setminus A}^* a_{A \cap B}^* = a_{A \cap B} a_{B \setminus A}^* a_{A \setminus B} a_{A \cap B}^* = a_{B \setminus A}^* a_{A \cap B} a_{A \setminus B} a_{A \cap B}^*$$

car  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  et  $B \setminus A$  sont deux à deux disjoints.

Par ailleurs :

$$\sum_{C \subset A \cap B} (-1)^{\text{card } C} a_C^* a_C e_X = \sum_{C \subset A \cap B} (-1)^{\text{card } C} e_X = (1 - 1)^{\text{card}(A \cap B)} e_X = a_{A \cap B} a_{A \cap B}^* e_X,$$

d'où :

$$a_A a_B^* = \sum_{C \subset A \cap B} (-1)^{\text{card } C} a_{B \setminus A}^* a_C^* a_C a_{A \setminus B} = \sum_{C \subset A \cap B} (-1)^{\text{card } C} a_{(B \setminus A) \cup C}^* a_{(A \setminus B) \cup C}.$$

Un produit  $a_A^* a_B a_C^* a_D$  peut donc être réécrit comme combinaison linéaire de produits de la forme :

$$a_A^* a_X^* a_Y a_D = \begin{cases} a_{A \cup X}^* a_{Y \cup D} & \text{si } A \cap X = Y \cap D = \emptyset ; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui prouve la stabilité de  $\mathcal{S}_n$  par produit.

**1d)** Soient  $A, B \in \mathcal{P}$  et  $\varphi \in \mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C})$  définie par  $\varphi e_A = e_B$  et  $\varphi e_X = 0$  pour tout  $X \in \mathcal{P} \setminus \{A\}$ . Lorsque  $(A, B)$  décrit  $\mathcal{P}^2$ ,  $\varphi$  décrit une base de  $\mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C})$  donc il suffit de montrer que  $\varphi \in \mathcal{S}_n$  pour tous choix de  $A, B$ .

En notant  $\bar{A}$  le complémentaire de  $A$  dans  $\{1, \dots, n\}$  on a :

$$\begin{aligned} a_{\bar{A}}^* a_A e_A &= e_{\bar{A}} \quad \text{et} \quad a_{\bar{A}}^* a_A e_X = 0 \text{ si } X \neq A ; \\ a_{B \setminus \bar{A}}^* a_{\bar{A} \setminus B} e_{\bar{A}} &= e_B ; \end{aligned}$$

d'où  $\varphi = a_{B \setminus \bar{A}}^* a_{\bar{A} \setminus B} a_{\bar{A}}^* a_A \in \mathcal{S}_n$ .

**2a)**  $zB_n^* - \bar{z}B_n = \frac{za_{\{1\}}^* - \bar{z}a_{\{1\}}}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{za_{\{n\}}^* - \bar{z}a_{\{n\}}}{\sqrt{n}}$  et ces termes commutent.

**2b)** On a :

$$\begin{aligned} a_{\{n\}} e_{\emptyset} &= 0, & a_{\{n\}}^* e_{\emptyset} &= e_{\{n\}}, & a_{\{n\}} e_{\{n\}} &= e_{\emptyset}, & a_{\{n\}}^* e_{\{n\}} &= 0, \\ a e_{\emptyset} &= 0, & a^* e_{\emptyset} &= e_{\{1\}}, & a e_{\{1\}} &= e_{\emptyset}, & a^* e_{\{1\}} &= 0, \end{aligned}$$

donc  $\text{vect}(e_{\emptyset}, e_{\{n\}})$  et  $\text{vect}(e_{\emptyset}, e_{\{1\}})$  sont stables respectivement par  $\frac{za_{\{n\}}^* - \bar{z}a_{\{n\}}}{\sqrt{n}}$  et  $\frac{za^* - \bar{z}a}{\sqrt{n}}$ , et il existe deux complexes  $\alpha_n, \beta_n$  tels que :

$$\begin{aligned} P_n \left( \frac{za_{\{n\}}^* - \bar{z}a_{\{n\}}}{\sqrt{n}} \right) \Omega_n &= \alpha_n e_{\emptyset} + \beta_n e_{\{n\}} ; \\ P_n \left( \frac{za^* - \bar{z}a}{\sqrt{n}} \right) \Omega &= \alpha_n e_{\emptyset} + \beta_n e_{\{1\}}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P_{n-1} \left( \frac{za_{\{n-1\}}^* - \bar{z}a_{\{n-1\}}}{\sqrt{n}} \right) e_{\emptyset} &= \alpha_{n-1} e_{\emptyset} + \beta_{n-1} e_{\{n-1\}} ; \\ P_{n-1} \left( \frac{za_{\{n-1\}}^* - \bar{z}a_{\{n-1\}}}{\sqrt{n}} \right) e_{\{n\}} &\in \text{vect}(e_{\{n\}}, e_{\{n-1, n\}}) ; \\ P_{n-1} \left( \frac{za^* - \bar{z}a}{\sqrt{n}} \right) \Omega &= \alpha_{n-1} e_{\emptyset} + \beta_{n-1} e_{\{1\}}. \end{aligned}$$

Et de proche en proche :

$$P_1 \left( \frac{za_{\{1\}}^* - \bar{z}a_{\{1\}}}{\sqrt{n}} \right) \dots P_n \left( \frac{za_{\{n\}}^* - \bar{z}a_{\{n\}}}{\sqrt{n}} \right) \Omega_n = \alpha_1 \dots \alpha_n e_{\emptyset} + u$$

avec  $u \in \text{vect}\{e_X; X \neq \emptyset\}$ . L'égalité demandée s'ensuit.

**2c)** Il suffit de prendre dans la relation précédente  $P_1 = \dots = P_n = \sum_{k=0}^p \frac{X^k}{k!}$  puis de faire tendre  $p$  vers l'infini.

**2d)** On a  $(za^* - \bar{z}a)\Omega = ze_{\{1\}}$  et  $(za^* - \bar{z}a)^2\Omega = -|z|^2\Omega$  donc  $w(z/\sqrt{n})\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(-\frac{|z|^2}{n}\right)^k \left(\Omega + \frac{ze_{\{1\}}}{(2k+1)\sqrt{n}}\right)$   
et  $\langle \Omega, w(z/\sqrt{n})\Omega \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(-\frac{|z|^2}{n}\right)^k = \cos\left(\frac{|z|}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{|z|^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Omega_n, W_n(z)\Omega_n \rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right).$$