

Corrigé MINES-PONTS 2004 PC 1

1. f est somme d'une série entière de rayon de CV $R \geq 1$; elle est donc de classe C^∞ sur $] -1, 1[$. Sur $[0, 1[$ on a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \geq 0$ car $a_n \geq 0$; de plus $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = f(1)$: f est donc croissante sur $[0, 1[$.

Sur $[0, 1[$ on a $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \geq 0$: f est donc convexe sur $[0, 1[$.

2. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec convergence normale sur $[0, 1]$ puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge : f est donc continue sur $[0, 1]$.

3. G est dans S car $g_n \geq 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$. $\hat{G}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1/2}{1-x/2} = \frac{1}{2-x}$. E^q est trivialement dans S et $\hat{E}^q(x) = x^q$. V est dans S car $v_n \geq 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2} = 1/2 + 1/2 = 1$. $\hat{V}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a x^{n-1}}{n} = -\frac{a \ln(1-x)}{x}$ pour $x \in] -1, 1[$. On en déduit sur cet intervalle $\hat{V}(x) = 1/2 - a \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

4. Puisque $a_0 = f(0) = 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x = x$. Il y a deux cas : soit $a_n = 0$ pour tout $n \geq 2$ et alors $f(x) = x$, soit $a_n > 0$ pour un $n \geq 2$ d'où $a_n x^n < a_n x$ et donc $f(x) < x$ sur $]0, 1[$. Supposons maintenant $a_0 > 0$. Il y a encore deux cas : soit $a_n = 0$ pour tout $n \geq 2$ et alors $f(x) = a_0 + (1-a_0)x > x$ sur $]0, 1[$, soit $a_n > 0$ pour un $n \geq 2$ d'où $f''(x) > 0$ sur $]0, 1[$: f est strictement convexe, il y a au maximum deux points de la courbe sur la droite $y = x$; puisque $f(1) = 1$, il y a au plus un $x \in]0, 1[$ tel que $f(x) = x$.

5. Soit $U \in S$ et $f = j(U)$. Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 1$, le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ vérifie $R \geq 1$; de plus, $f^{(n)}(0) = u_n n! \geq 0$. f est donc bien dans F . Réciproquement, pour $f \in F$, la suite (a_n) est unique car $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$; elle est dans S puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$ et $a_n \geq 0$. j est donc bien une bijection de S sur F .

6. On a clairement $w_n \geq 0$. La série de terme général w_n est le produit de Cauchy des séries convergentes de termes généraux positifs u_n et v_n ; elle est donc convergente et sa somme est égale au produit des deux sommes, soit 1. $U * V$ est donc bien dans S .

7. La série entière $(\sum w_n x^n)$ est le produit de Cauchy des séries entières $(\sum u_n x^n)$ et $(\sum v_n x^n)$. On a donc $j(U * V) = j(U)j(V)$.

8. Utilisons la bijection j^{-1} ; pour f, g dans F , $j^{-1}(fg) = j^{-1}(f) * j^{-1}(g)$; j^{-1} est donc un morphisme de $(F, \cdot)$ sur $(S, *)$. On en déduit que la loi $*$ est associative, commutative et a pour élément neutre $j^{-1}(1) = E^0$.

9. B^p est dans S puisque $p > 0$, $1-p > 0$ et $p + (1-p) = 1$. Γ^p est dans S puisque $(1-p)p^n > 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)p^n = \frac{1-p}{1-p} = 1$ (série géométrique). Π^λ est dans S puisque $\lambda > 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^\lambda e^{-\lambda} = 1$.

$\hat{B}^p(x) = 1-p+px$, $\hat{\Gamma}^p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)p^n x^n = \frac{1-p}{1-px}$ et $\hat{\Pi}^\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} x^n = e^{\lambda x} e^{-\lambda} = e^{-\lambda(1-x)}$.

10. $j(B^{p*q})(x) = (j(B^p)(x))^q = (1-p+px)^q = \sum_{n=0}^q \binom{q}{n} (1-p)^{q-n} p^n x^n$ donc B^{p*q} a pour terme général $\beta_n^{p*q} = \binom{q}{n} (1-p)^{q-n} p^n$ pour $n \leq q$ et 0 pour $n > q$.

$j(\Gamma^{p*q})(x) = (j(\Gamma^p)(x))^q = \left(\frac{1-p}{1-px}\right)^q = (1-p)^q \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-q}{n} (-px)^n = (1-p)^q \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+q-1}{n} (px)^n$ donc Γ^{p*q} a pour terme général $\gamma_n^{p*q} = (1-p)^q \binom{n+q-1}{n} p^n$.

$j(\Pi^{\lambda*q})(x) = (j(\Pi^\lambda)(x))^q = (e^{-\lambda(1-x)})^q = e^{-\lambda q(1-x)}$. $\Pi^{\lambda*q} = \Pi^{\lambda q}$ a donc pour terme général $\pi_n^{\lambda*q} = \frac{(\lambda q)^n}{n!} e^{-\lambda q}$.

11. $\beta_n^{(\lambda/q)*q} = \binom{q}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{q}\right)^{q-n} \left(\frac{\lambda}{q}\right)^n = \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} e^{(q-n)\ln(1-\lambda/q)} \frac{\lambda^n}{q^n}$. Quand q tend vers l'infini, $(q-n)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{q}\right)$ a pour limite $-\lambda$ donc $\beta_n^{(\lambda/q)*q}$ a pour limite $\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \pi_n^\lambda$.

12. Puisque $u_n^q \geq 0$, $v_n = \lim_{q \rightarrow +\infty} u_n^q \geq 0$. Pour tout $N > 0$, $\sum_{n=0}^N u_n^q \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^q = 1$ donc en faisant tendre q vers l'infini, $\sum_{n=0}^N v_n \leq 1$. La série de terme général v_n converge et sa somme est inférieure ou égale à 1.

Si on prend $U^q = \Pi^{1+q}$, on obtient $v_n = \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{(1+q)^n}{n!} e^{-(1+q)} = 0$.

13. Supposons $r \leq s$; puisque $0 \leq u_n n^r \leq u_n n^s$ la convergence de la série de terme général $u_n n^s$ entraîne la convergence de la série de terme général $u_n n^r$; on a donc $S_s \subset S_r$. Par exemple, $S_2 \subset S_1$.

14. φ est clairement symétrique et bilinéaire (pour Y fixé, $X \mapsto \varphi(X, Y)$ est une forme linéaire). De plus, $\varphi(X, X) = \sum_{i=1}^N a_i x_i^2 \geq 0$ et n'est nul que si chaque $a_i x_i^2$ est nul soit $X = 0$ puisque $a_i > 0$. φ est donc bien un produit scalaire.

15. Pour U dans S_2 , U est aussi dans S_1 ; donc $M(U)$ existe et $V(U)$ aussi. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique aux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^N$ définis par $x_n = \sqrt{u_n}$ et $y_n = n\sqrt{u_n}$: $\left(\sum_{n=1}^N nu_n\right)^2 = (X|Y)^2 \leq (X|X)(Y|Y) = \left(\sum_{n=1}^N u_n\right) \left(\sum_{n=1}^N n^2 u_n\right) \leq \sum_{n=1}^N n^2 u_n$ puisque $\sum_{n=1}^N u_n \leq 1$. On en déduit en faisant tendre N vers l'infini : $M(U)^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n$ donc $V(U) \geq 0$.

16. Pour $x \in [0, 1[$ on a $\widehat{U}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nu_n x^{n-1}$; puisque $nu_n \geq 0$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} nu_n = M(U)$ il y a convergence normale sur $[0, 1]$ et donc $\widehat{U}'$ est continue sur $[0, 1]$: $\widehat{U}'(1) = M(U)$. De même, pour $x \in [0, 1[$ on a $\widehat{U}''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2}$; puisque $n(n-1)u_n \geq 0$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)u_n = V(U) + M(U)^2 - M(U)$ il y a convergence normale sur $[0, 1]$ et donc $\widehat{U}''$ est continue sur $[0, 1]$: $\widehat{U}''(1) = V(U) + M(U)^2 - M(U)$.

17. Soit la fonction g définie par $g(x) = \widehat{U}(x) - 1 - \widehat{U}'(1)(x-1) - \frac{1}{2}\widehat{U}''(1)(x-1)^2$; g est de classe C^2 sur $[0, 1]$, $g'(x) = \widehat{U}'(x) - \widehat{U}'(1) - \widehat{U}''(1)(x-1)$ et $g''(x) = \widehat{U}''(x) - \widehat{U}''(1)$. On vérifie $g(1) = 0$, $g'(1) = 0$ et $|g''(t)| = \widehat{U}''(1) - \widehat{U}''(t) \leq \widehat{U}''(1) - \widehat{U}''(x) = \varepsilon(x)$ puisque $\widehat{U}''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n t^{n-2} = \widehat{U}''(t) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n = \widehat{U}''(1)$ pour $0 < x < t < 1$. On obtient par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1

appliquée à la fonction g sur l'intervalle $[x, 1]$: $|g(x)| \leq \frac{1}{2}(x-1)^2 \sup_{t \in [x, 1]} |g''(t)| \leq \frac{1}{2}(x-1)^2 \varepsilon(x)$.

18. La suite B^p est dans S_2 puisque $\beta_n^p = 0$ pour $n \geq 2$. Γ^p est dans S_2 puisque $n^2 \gamma_n^p = n^2(1-p)p^n = o(1/n^2)$. Π^λ est dans S_2 puisque $n^2 \pi_n^\lambda = n^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = o(1/n^2)$.

19. On calcule immédiatement : $M(B^p) = p$ et $V(B^p) = p - p^2$.

Pour $U = \Gamma^p$, $\widehat{U}(x) = \frac{1-p}{1-px}$ donc $\widehat{U}'(x) = \frac{p(1-p)}{(1-px)^2}$ et $M(\Gamma^p) = \widehat{U}'(1) = \frac{p(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p}$.

$\widehat{U}''(x) = \frac{2p^2(1-p)}{(1-px)^3}$ d'où $V(\Gamma^p) = \widehat{U}''(1) + M(\Gamma^p) - M(\Gamma^p)^2 = \frac{2p^2(1-p)}{(1-p)^3} + \frac{p}{1-p} - \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 = \frac{p}{(1-p)^2}$.

Pour $U = \Pi^\lambda$, $\widehat{U}(x) = e^{-\lambda(1-x)}$ donc $\widehat{U}'(x) = \lambda e^{-\lambda(1-x)}$ et $\widehat{U}''(x) = \lambda^2 e^{-\lambda(1-x)}$. On en déduit $M(\Pi^\lambda) = \widehat{U}'(1) = \lambda$ et $V(\Pi^\lambda) = \widehat{U}''(1) + M(\Pi^\lambda) - M(\Pi^\lambda)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.