

e3a - PSI - 2010
Un corrigé de l'épreuve A

Applications directes du cours.

1. Si f est paire alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$. En dérivant, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f'(-x) = f'(x)$$

et f' est donc impaire.

2. Si f est impaire alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$. En dérivant, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f'(-x) = -f'(x)$$

et f' est donc paire.

3. On a $H^2 = H$ et H est donc une symétrie vectorielle. On a donc $\ker(H + Id) \oplus \ker(H - Id) = E$ ce qui signifie que l'ensemble des fonctions de E qui sont paires et celui des fonctions de E qui sont impaires sont supplémentaires dans E et donne la décomposition demandée. On peut d'ailleurs expliciter cette décomposition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = p(x) + i(x)$$

p est paire et i est impaire.

4. La réciproque de la question 1 est vraie. Supposons en effet que f' soit impaire. Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle \mathbb{R} , on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

Le changement de variable $u = -t$ donne alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) + \int_0^{-x} f'(-u) du = f(0) - \int_{-x}^0 (-f'(u)) du = f(0) + \int_{-x}^0 f'(u) du = f(-x)$$

et la fonction f est paire.

Soit $f : x \mapsto 1 + x$. $f' : x \mapsto 1$ est paire mais $f(-1) = 0 \neq -f(1) = -2$ et f n'est pas impaire.

5. Raisonnons par analyse et synthèse.

- Soit f une fonction convenable. Comme en question 3.2 on écrit $f = p + i$ avec p paire et i impaire. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, (p''(x) + p(x)) + (i''(x) - i(x)) = 1 + \sin(2x)$$

$p'' + p$ est paire et $i'' + i$ est impaire. Par unicité de la décomposition de 3.2, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, p''(x) + p(x) = 1 \quad \text{et} \quad i''(x) - i(x) = \sin(2x)$$

On sait résoudre ces équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et il existe des constantes a, b, c, d telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = 1 + a \cos(x) + b \sin(x) \quad \text{et} \quad i(x) = -\frac{1}{5} \sin(2x) + c \operatorname{ch}(x) + d \operatorname{sh}(x)$$

La parité de p impose $b = 0$ et l'imparité de i impose $c = 0$. Toute solution est donc du type

$$x \mapsto 1 - \frac{1}{5} \sin(2x) + a \cos(x) + d \operatorname{sh}(2x)$$

- On vérifie réciproquement que pour tout choix de a et d la fonction ci-dessus est solution.

Préliminaires.

1. La linéarité de la dérivation entraîne celle de φ . La dérivée d'un élément de E étant dans E et E étant un espace vectoriel, $\varphi(E) \subset E$. On a donc

$$\varphi \in \mathcal{L}(E)$$

2. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour toute fonction continue f , il existe une fonction deux fois dérivable y telle que $y'' + \lambda y = f$. Si $f \in \mathcal{C}^\infty$ alors on montre par récurrence que $y \in \mathcal{C}^n$ pour tout n et donc $y \in E$. Ainsi

$$\forall h \in E, \exists y \in E / \varphi(y) = h$$

3. La question précédente indique que φ est surjective de E dans E (tout élément de E admet au moins un antécédent dans E).
4. Le noyau de φ est l'ensemble des solutions (toutes de classe \mathcal{C}^∞ et donc dans E) de $y'' + \lambda y = 0$. Le cours nous indique qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 2.
5. $y'' + \lambda y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 + \lambda = 0$.
- Si $\lambda < 0$ alors $\ker(\varphi) = \text{Vect}(x \mapsto \cos(\sqrt{-\lambda}x), x \mapsto \sin(\sqrt{-\lambda}x))$.
 - Si $\lambda = 0$ alors $\ker(\varphi) = \text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x)$.
 - Si $\lambda > 0$ alors $\ker(\varphi) = \text{Vect}(x \mapsto \text{ch}(\sqrt{\lambda}x), x \mapsto \text{sh}(\sqrt{\lambda}x))$.
6. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous indique que l'ensemble des solutions de $y'' + \lambda y = 1/2$ est un espace-affine dirigé par $\ker(\varphi)$.
- Si $\lambda \neq 0$ alors $x \mapsto \frac{1}{2\lambda}$ est solution particulière et l'ensemble des solutions est donc

$$(x \mapsto \frac{1}{2\lambda}) + \ker(\varphi)$$

- Si $\lambda = 0$ alors $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ est solution particulière et l'ensemble des solutions est donc

$$(x \mapsto \frac{x^2}{4}) + \text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x)$$

- 7.1. On doit encore distinguer les cas.

- Si $\lambda < 0$, tous les éléments du noyau sont bornés :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \ker(\varphi) = \ker(\varphi) = \text{Vect}(x \mapsto \cos(\sqrt{-\lambda}x), x \mapsto \sin(\sqrt{-\lambda}x))$$

- Si $\lambda = 0$ alors un élément de $\ker(\varphi)$ est du type $x \mapsto ax + b$. S'il est borné alors $a = 0$ et réciproquement. Ainsi,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \ker(\varphi) = \text{Vect}(x \mapsto 1)$$

- Si $\lambda < 0$ alors un élément de $\ker(\varphi)$ est du type $ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$. S'il est bornée alors $a = 0$ (en regardant la limite en $+\infty$) et $b = 0$ (en regardant la limite en $-\infty$). Ainsi

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \ker(\varphi) = \{0\}$$

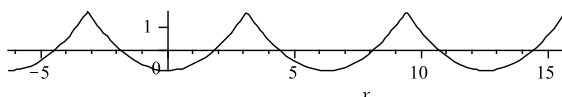
- 7.2. $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\ker(\varphi)$ sont ainsi en somme directe si et seulement si $\lambda < 0$.

- 7.3. Procédons par analyse. Si f et g existent alors $x \mapsto x - g(x)$ est un élément de $\ker(\varphi)$ et il existe donc a et b tels que $x - g(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$. En divisant par x^2 et en prenant la limite en $+\infty$, on obtient $a = 0$. De même on a $b = 0$ (comportement en $-\infty$). Ainsi, $\forall x, g(x) = x$ et g n'est pas bornée! Une telle décomposition n'existe pas.

- 7.4. Si $\lambda \geq 0$, les espaces ne sont pas en somme directe et donc pas supplémentaires. Si $\lambda < 0$, la question précédente montre que $x \mapsto x$ ne se décompose pas sur ces espaces qui, à nouveau, ne sont pas supplémentaires.

Partie I.

1.1. Notons qu'il y a a priori un problème de définition puisque l'énoncé impose, outre la périodicité, une valeur en π ET $-\pi$. Comme celles-ci sont les mêmes, la définition est quand même licite.



1.2. Par parité de f , les coefficients en sinus sont nuls :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = 0$$

Pour les coefficients en cosinus, des intégrations par parties donnent

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Enfin on a

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

1.3. f est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux (dérivable à dérivée continue sauf aux points $\pi + 2k\pi$ où il y a une dérivée à droite et gauche) et la série de Fourier de f est donc normalement convergente sur \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

1.4. Avec $x = 0$, on obtient la convergence de la série proposée et

$$\beta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = f(0) = -\frac{\pi^2}{12}$$

1.5. La série $\sum((-1)^n/n^2)$ vérifie les hypothèses de la règle spéciale (suite alternée qui décroît en module vers 0) et on a donc

$$\left| \sum_{n=1}^q \frac{(-1)^n}{n^2} - \beta \right| \leq \frac{1}{(q+1)^2}$$

Il suffit donc de choisir $q > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$ pour avoir l'inégalité demandée. On peut prendre

$$q = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

1.6. Dans le résultat de 1.3, on choisit maintenant $x = \pi$ pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = f(\pi) = \frac{\pi^2}{6}$$

1.7. f est dérivable à droite et gauche en π avec

$$f'_g(\pi) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f'_d(\pi) = -\frac{\pi}{2}$$

Ce résultat s'obtient en dérivant f et en prenant les limites en π^- et π^+ (ou $(-\pi)^+$) et grâce à un corollaire des accroissements finis.

En particulier, f n'est pas dérivable en π et n'est a fortiori pas de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

2.1. Soit $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2 + a^2}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente et $\sum(u_n)$ est donc normalement convergente sur \mathbb{R} . Les u_n étant toutes continues, le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions indique que h est définie et continue sur \mathbb{R} .

2.2. Avec la question 1.3 on a $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ avec

$$v_n(x) = (-1)^n \cos(nx) \left(\frac{1}{n^2 + a^2} - \frac{1}{n^2} \right) = (-1)^{n+1} \frac{a^2 \cos(nx)}{n^2(a^2 + n^2)}$$

2.3. Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions.

- Pour tout n , v_n est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
- $\sum(v_n)$ converge simplement sur \mathbb{R} (de somme simple égale à $h - f$).
- Pour tout réel x et tout entier $n \geq 1$, on a

$$|v'_n(x)| \leq \frac{a^2}{n(n^2 + a^2)} \quad \text{et} \quad |v''_n(x)| \leq \frac{a^2}{n^2 + a^2}$$

Dans les deux cas, les majorants sont indépendants de x et sont les termes généraux de séries convergentes. Ainsi, $\sum(v'_n)$ et $\sum(v''_n)$ sont normalement convergentes sur \mathbb{R} .

Le théorème s'applique et indique que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = h - f$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} ses deux premières dérivées s'obtenant en "dérivant terme à terme".

2.4. f et $h - f$ étant de classe \mathcal{C}^2 sur $] - \pi, \pi[$, il en est de même pour h par théorèmes généraux.

3. En reprenant les conclusions de 2.3, on a

$$\forall x \in] - \pi, \pi[, h''(x) - f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v''_n(x) = a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{a^2 + n^2} = a^2 h(x)$$

c'est à dire que h est solution sur $] - \pi, \pi[$ de

$$y'' - a^2 y = \frac{1}{2}$$

Avec la question 6 des préliminaires, on en déduit qu'il existe des constantes c et d telles que

$$\forall x \in] - \pi, \pi[, h(x) = -\frac{1}{2a^2} + c \operatorname{ch}(ax) + d \operatorname{sh}(ax)$$

4. On a

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, h'(x) - f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v'_n(x)$$

Avec $x = 0$, on en déduit que

$$h'(0) = f'(0) = 0$$

En faisant tendre x vers π (et grâce à un corollaire des accroissements finis pour l'existence des dérivées à gauche) on a aussi

$$h'_g(\pi) = f'_g(\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} v'_n(\pi) = f'_g(\pi) = \frac{\pi}{2}$$

5. h est paire d'après sa définition et donc, avec les notations introduites en 3, $c = 0$:

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, h(x) = -\frac{1}{2a^2} + c \operatorname{ch}(ax)$$

En dérivant cette relation et en faisant tendre x vers π , on obtient $\frac{\pi}{2} = a \operatorname{ch}(a\pi)$ ce qui donne la valeur de c et

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, h(x) = \frac{\pi \operatorname{ch}(ax)}{2a \operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}$$

6. h ainsi que la fonction dans le second membre sont continues sur \mathbb{R} . L'identité précédente est donc encore valable en $\pm\pi$ par passage à la limite.

7. Pour $x = \pi$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{2a \operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}$$

8. Soit $w_n : a \mapsto \frac{1}{n^2 + a^2}$. $\sum(w_n)$ est constituée de fonctions continues et converge normalement sur \mathbb{R} (puisque $|w_n(a)| \leq \frac{1}{n^2}$). Sa somme est donc continue sur \mathbb{R} . On peut donc passer à la limite $a \rightarrow 0$ dans la question précédente pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{2a \operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a\pi \operatorname{ch}(a\pi) - \operatorname{sh}(a\pi)}{2a^2 \operatorname{sh}(a\pi)}$$

Or, au voisinage de 0, $a\pi \operatorname{ch}(a\pi) - \operatorname{sh}(a\pi) = a\pi(1 + a^2\pi^2/2 + o(a^2)) - (a\pi + o(a^2)) \sim \frac{a^3\pi^3}{2}$ et $2a^2 \operatorname{sh}(a\pi) \sim 2a^3\pi$. On retrouve ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie II.

1. $f_a : x \mapsto \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} et on a donc des problèmes aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

Au voisinage de 0, $f_a(x) \rightarrow a$ et f_a est prolongeable par continuité en 0.

Au voisinage de $+\infty$, $|f_a(x)| \leq \frac{1}{e^x - 1} \sim e^{-x} = o(1/x^2)$ est intégrable.

Finalement, f_a est intégrable sur \mathbb{R} et son intégrale existe a fortiori.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto e^{-kx} \sin(ax)$ est continue sur \mathbb{R}^+ et dominée par $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$. C'est donc une fonction intégrable sur \mathbb{R}^+ et J_k existe bien. On a

$$\int_0^t e^{-kx} \sin(ax) dx = \operatorname{Im} \left(\int_0^t e^{(-k+ia)x} dx \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{-k+ia} \left(e^{(-k+ia)t} - 1 \right) \right)$$

En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, J_k = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{k - ia} \right) = \frac{a}{k^2 + a^2}$$

3. En utilisant une somme géométrique de raison $-e^{-x}$, on peut écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} = \frac{e^{-x} \sin(ax)}{1 - e^{-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(k+1)x} \sin(ax)$$

Par ailleurs, la question précédente indique que

$$a \sum_{k=0}^n \frac{1}{a^2 + (k+1)^2} = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n e^{-(k+1)x} \sin(ax) dx$$

En intégrant la première relation et en soustrayant alors la seconde, on obtient

$$R_n = \int_0^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-(k+1)x} \sin(ax) dx$$

Sous l'intégrale, on reconnaît une somme géométrique et on obtient

$$R_n = \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx$$

4. $f_a : x \mapsto \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et de limite nulle en $+\infty$ (voir question 1 de cette partie).
C'est donc une fonction bornée sur \mathbb{R}^+ et

$$|R_n| \leq \|f_a\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} dx = \frac{\|f_a\|_\infty}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

5. On divise par a dans la relation de la question et on fait tendre n vers $+\infty$ pour obtenir

$$\frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + (k+1)^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{2a \operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}$$

la dernière identité provenant de la question 7 de la partie I.