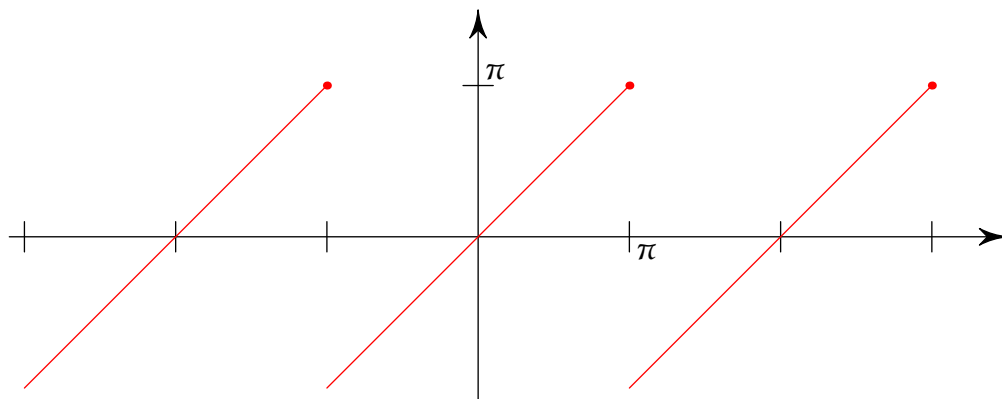


I. Calcul d'une série

1. Graphe de g

Voilà le graphe demandé sur $] -3\pi, 3\pi]$.



2. Coefficients de Fourier pairs

La fonction étant impaire à une valeur près par période, les coefficients de Fourier pairs, les a_n pour $n \in \mathbb{N}$, sont nuls.

3. Coefficients de Fourier impairs

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} g(x) \sin(n\omega x) dx$.

Ici, la période est 2π , et, compte tenu de la presque imparité, on peut travailler sur $[0, \pi]$.

Ce qui donne : $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx$.

On traite bien sûr cette intégrale par partie, en dérivant le x et en primitivant le sinus, ce qui donne :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right) = \frac{2}{\pi} \left((-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} + \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}$$

4. Convergence de la série de Fourier

g est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, périodique.

Sa série de Fourier converge donc en tout point vers la demi somme des limites à droite et à gauche en ce point.

Donc, partout où g est continue, c'est à dire pour $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a : $S(x) = g(x)$.

En ces points particuliers, la somme de la série de Fourier est nulle, et la fonction vaut π , il n'y a donc pas égalité.

Finalement, $S(x) = g(x)$ si et seulement $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Égalité de Parseval

On a bien sûr aussi g de classe $\mathcal{C}^0$ par morceaux, périodique, on peut donc appliquer le théorème de Parseval.

En utilisant le bon a_0 , et non pas celui de l'énoncé, on a, toujours en travaillant sur $[0, \pi]$ par presque imparité :

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} g^2(x) dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\text{Avec : } \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} g^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\text{Et aussi : } a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\text{On en conclut facilement : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

II. Régularité de f

1. Développement limité

On a dans le cours : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

2. Continuité

On en déduit au voisinage de 0 :

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x) \text{ qui tend bien vers } f(0) = 1 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0.$$

f est bien continue en 0.

3. Dérivabilité

On calcule le taux d'accroissement au voisinage de 0 : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{2} + o(x)}{x} = \frac{1}{2} + o(1)$
qui tend vers $\frac{1}{2}$ quand x tend vers 0.

f est donc dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = \frac{1}{2}$.

4. Dérivée usuelle

Sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$, on applique les règles de dérivation usuelle d'un quotient et du logarithme.

$$\text{Ce qui donne : } f'(x) = \frac{\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)}{x^2} = \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}.$$

5. Classe de f

On utilise maintenant de nouveau le développement limité :

$$f'(x) = \frac{x + (1-x)\left(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2(1-x)} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)}$$

qui tend bien vers $f'(0) = \frac{1}{2}$ quand x tend vers 0.

f' est donc continue en 0, donc f , continue, est donc de $\mathcal{C}^1$ en 0.

Comme elle l'est aussi par fonctions usuelles sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$.

III. Développement en série entière

1. Dérivée

1.a. L est une primitive de f , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$, donc, elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -\infty, 1[$, donc sur $[-1, 1[$.

1.b. Et, bien sûr : $L'(x) = f(x)$.

2. Développement en série entière

2.a. Dans le cours : $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ sur $] -1, 1[$.

$$\text{On en déduit : } -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \text{ sur }] -1, 1[.$$

2.b. Toujours sur le même intervalle, avec, en plus, $x \neq 0$, on a :

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

La somme de cette série entière est 1 en 0, comme $f(0)$, on a donc : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ sur $] -1, 1[$.

3. Prolongement par continuité

3.a. On peut primitiver une série entière terme à terme sur l'ouvert de convergence, et $L(0) = 0$,

on a donc : $L(x) = L(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ sur $] -1, 1[$.

3.b. Pour $x = -1$, la série entière précédente converge (absolument) par critère de Riemann, donc converge.

La somme de cette série entière est donc continue à droite en -1 .

De même, L est définie et continue à droite en -1 .

Elles sont égales sur $] -1, 0]$, par unicité de la limite, elles sont égales en -1 .

3.c. Pour $x = 1$, la série entière précédente converge (absolument) par critère de Riemann, donc converge.

La somme de la série entière est donc définie et continue à gauche en 1, de plus, L et la série entière sont égales sur $[0, 1[$.

L est donc prolongeable par continuité à droite en 1, de valeur $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3.d. On a donc $L(x)$ qui tend vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand x tend à gauche vers 1.

Ceci est une limite finie, et, par définition de la convergence d'une intégrale généralisée,

$\int_0^1 f(t) dt$ converge et vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

4. Première application

4.a. $J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$

$x \mapsto h(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ est continue, donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$, on a une double singularité en 0 et en $+\infty$.

Étude en 0

$h(x) = \frac{x}{1 + x + o(x) - 1} = \frac{x}{x + o(x)} = \frac{1}{1 + o(1)}$ qui tend vers 1 quand x tend vers 0,

h a donc une limite finie en un point fini, son intégrale converge en ce point.

Étude en $+\infty$

La fonction est positive, $h(x) \sim \frac{x}{e^x} = x e^{-x} = x e^{-x/2} \times e^{-x/2} \leq e^{-x/2}$ pour x assez grand.

Comme l'intégrale de cette exponentielle converge en $+\infty$, celle de h converge aussi, par équivalence et comparaison de fonctions positives.

4.b. On fait le changement de variable indiqué qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Signalons tout de suite que l'intégrale du départ et l'intégrale obtenue vont être de même nature, donc ici convergentes, et donc égales.

Ainsi, on écrira directement cette égalité !

$t = 1 - e^{-x}$ donne $x = -\ln(1 - t)$ et donc $dx = \frac{1}{1 - t} dt$.

x tend vers 0 donne t tend vers 0, tandis que x tend vers $+\infty$ donne t tend vers 1.

$$\text{On a donc : } J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \int_0^1 \frac{-\ln(1 - t)}{\frac{1}{1 - t} - 1} \frac{1}{1 - t} dt = \int_0^1 \frac{-\ln(1 - t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{6}$$

5. Deuxième application

5.a. L a bien été prolongée par continuité sur $[-1, 1]$.

On pose $h(x) = L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$, qui est continue sur $[-1, 1]$.

On dérive h sur $] -1, 0[\cup]0, 1[$, il suffit de montrer que sa dérivée est nulle sur cet intervalle pour montrer que h est constante sur $[-1, 1]$.

$$h'(x) = L'(x) - L'(-x) - xL'(x^2) = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} + x \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \frac{-\ln(1-x) - \ln(1+x) + \ln(1-x^2)}{x} = 0.$$

h est donc constante sur $[-1, 1]$, et comme $h(0) = 0$, on a : $h(x) = 0$ sur $[-1, 1]$.

5.b. L'égalité pour $x = 1$ donne : $L(1) + L(-1) = \frac{1}{2}L(1)$, donc : $L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}$.

IV. Résolution d'une équation différentielle

1. Équation homogène associée

1.a. l'équation différentielle $xz' + z = 0$ est linéaire du premier ordre sans second membre. Sur un intervalle ne contenant pas 0, les solutions sont de la forme : $z = A \exp(-\int \frac{1}{x} dx) = A \exp(-\ln|x|) = \frac{A}{|x|}$.

Quitte à changer A , qui est arbitraire, en $-A$ sur un intervalle où $x < 0$, la solution générale de l'équation homogène sur K est donc de la forme : $z(x) = \frac{A}{x}$.

1.b. Le résultat demandé revient à montrer que f est solution (particulière) de $xz' + z = \frac{1}{1-x}$ sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1[$.

On a déjà calculé sur ces intervalles : $f'(x) = \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}$.

Donc : $xf'(x) + f(x) = \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)} - \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{1}{1-x}$.

La solution générale de $xz' + z = \frac{1}{1-x}$ sur $[-1, 0[$ ou sur $]0, 1[$ est donc : $z(x) = f(x) + \frac{A}{x}$.

2. Équation avec second membre

La solution générale de $xy'' + y' = \frac{1}{1-x}$ sur $[-1, 0[$ ou sur $]0, 1[$ est donc une primitive arbitraire des précédentes.

Rappelons que sur les intervalles indiqués, L est une primitive de f .

On a donc : $y = L(x) + A \ln|x| + B$, solution générale de $xy'' + y' = \frac{1}{1-x}$ sur $[-1, 0[$ ou sur $]0, 1[$.

3. Recollement de solutions

3.a. Sur $[-1, 0[$, on a : $y = L(x) + A_1 \ln(-x) + B_1$, tandis que sur $]0, 1[$, on a : $y = L(x) + A_2 \ln(x) + B_2$.

Les intervalles sont différents, donc les constantes aussi !

3.b. Comme y est solution sur $[-1, 1]$, elle est définie et continue en 0, ce qui entraîne $A_1 = A_2 = 0$ pour que les limites (finies) existent.

Ainsi, sur $[-1, 0[$, on a : $y = L(x) + B_1$, tandis que sur $]0, 1[$, on a : $y = L(x) + B_2$, ce qui entraîne $B_1 = B_2$, qu'on note B , pour que ces limites (finies) soient égales.,

Finalement, si y est solution sur $[-1, 1]$, alors, nécessairement : $y = L(x) + B$.

3.c. Il suffit maintenant de montrer que $x \mapsto L(x) + B$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1, 1]$, ce qui est vrai puisque L l'est !

Finalement, les solutions de $xy'' + y' = \frac{1}{1-x}$ sur $[-1, 1]$ sont : $y = L(x) + B$.