

Exercice 1

- Notons $u_n(x) = \frac{2x^n}{n^2-1}$. Il vient que $\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$ de sorte que $\sum u_n(x)$ converge (absolument) pour $|x| < 1$ et diverge (grossièrement) pour $|x| > 1$. Ainsi $R = 1$. $\square$
- $u_n(x) = \frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n+1}$ et les deux séries entières $\sum \frac{x^n}{n-1}$ et $\sum \frac{x^n}{n+1}$ ont également pour rayon 1 de la même manière que ci-dessus, de sorte que $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ pour $|x| < 1$ car la linéarisation est alors bien licite. Or $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x \ln(1-x)$ pour $|x| < 1$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x} (-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2})$ pour $|x| < 1$ et $x \neq 0$. Ainsi $S(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1-x^2}{x} \ln(1-x)$ pour $|x| < 1$ et $x \neq 0$ et $S(0) = 0$ $\square$

Remarque : on vérifie que l'on a bien $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{1-x^2}{x} \ln(1-x) \right) = 0$ ce qui était prévisible car S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ donc en particulier continue en 0.

- Directement $S(1-h) = 1 + \frac{1-h}{2} + \frac{2-h}{1-h} \times h \ln h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \frac{3}{2}$ $\square$

Remarque : en fait la série $\sum u_n(x)$ converge clairement normalement sur $[-1, 1]$ donc est continue sur $[-1, 1]$ par théorème de récupération uniforme de la continuité. Ainsi $\lim_{h \rightarrow 0^+} S(1-h) = S(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2}$ comme on peut facilement le voir par télescopage sur une somme partielle.

Exercice 2

- Sur $]0, +\infty[$ l'équation se normalise en $y' - \frac{3}{2x}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc ses solutions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ (puisque $x \mapsto \frac{3}{2x}$ et $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ le sont) et forment une droite affine dirigée par exemple par $x \mapsto \exp\left(\int_1^x \frac{3 dt}{2t}\right) = x^{3/2}$. La méthode de la variation de la constante montre que $x \mapsto \lambda(x)x^{3/2}$ est solution si et seulement si $\lambda'(x)x^{3/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ soit si et seulement si $\lambda'(x) = \frac{1}{2x^2}$. On peut choisir $\lambda(x) = -\frac{1}{2x}$ ce qui montre que $x \mapsto -\frac{\sqrt{x}}{2}$ est solution particulière. Ainsi la solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto \alpha x^{3/2} - \frac{\sqrt{x}}{2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$
- Si y est solution sur $[0, +\infty[$ elle est a fortiori solution sur $]0, +\infty[$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \alpha x^{3/2} - \frac{\sqrt{x}}{2}$ pour $x > 0$. En outre y est nécessairement continue en 0 ce qui exige $y(0) = 0$ et dérivable à droite en 0. Mais $\frac{y(x) - y(0)}{x} = \alpha\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ pour tout réel α . L'équation (E) n'admet donc aucune solution sur $[0, +\infty[$. $\square$

Problème : Autour de la transformation de Laplace

Question préliminaire

- Si f est positive alors les deux propositions sont équivalentes mais pour une fonction de signe non asymptotiquement fixe au voisinage de $+\infty$ on a seulement (i) implique (ii) (la réciproque étant fausse comme le prouve le classique exemple de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$). $\square$

Exemples et propriétés

2.

(a) Si f et g appartiennent à E et si λ est un réel quelconque alors $f + \lambda g$ appartient encore à E .

En effet elle est bien continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x > 0$ et tout $t > 0$, $|f(t) + \lambda g(t)|e^{-xt} \leq \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = |f(t)|e^{-xt} + |\lambda| \times |g(t)|e^{-xt}$ bien intégrable.

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ $\square$

(b) Si $f \in F$ alors f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $f(t)e^{-xt} = O(e^{-xt})$ au voisinage de $t = +\infty$ et donc $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $x > 0$. Ainsi F est bien inclus dans E . Par ailleurs F est clairement stable par combinaison linéaire. Donc F est bien un sous-espace vectoriel de E . $\square$

(c) On note déjà que $\mathcal{L}$ est bien définie sur E (par définition même de E) et sa linéarité est immédiate par linéarité de l'intégration des fonctions intégrables. $\square$

3

(a) Notons que $\mathcal{U} \in F \subset E$ et $\mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0 \quad \square$

(b) Plus généralement pour tout $\lambda \geq 0$ on a $h_\lambda \in F \subset E$ et $\mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t} dt = \frac{1}{x+\lambda} \quad \forall x > 0 \quad \square$

4. Soit n fixé quelconque dans $\mathbb{N}$ et $x > 0$ fixé. Il vient $\varphi(t) = \frac{t^n e^{-xt}}{e^{-xt/2}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissances comparées.

Il en résulte en particulier l'existence de $A > 0$ tel que $\varphi(t) \leq 1$ pour $t \geq A$. $\square$

Alors g_n est bien continue sur $\mathbb{R}^+$ et $g_n(t)e^{-xt} = O(|f(t)|e^{-(x/2)t})$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque $|f(t)|e^{-(x/2)t}$ l'est car $f \in E$ et $\frac{x}{2} > 0$.

Ainsi si $f \in E$ alors, pour tout entier n , $t \mapsto t^n f(t) \in E$. $\square$

5. Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ une intégration par parties fournit

$$\int_0^A f'(t)e^{-xt} dt = f(A)e^{-Ax} - f(0) + x \int_0^A f(t)e^{-xt} dt.$$

Or $f(A)e^{-Ax} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} 0$ car f est bornée et $\int_0^A f(t)e^{-xt} dt \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} \mathcal{L}(f)(x)$ puisque $f \in E$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt} dt$ converge et vaut $x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

Comme f' est continue et positive (puisque f est croissante) on en déduit (question préliminaire) que $t \mapsto f'(t)e^{-xt}$ est intégrable i.e. que $f' \in E$ et que $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0) \quad \forall x > 0 \quad \square$

6. Régularité d'une transformée de Laplace

(a) Soit $f \in E$ soit $\varphi(x, t) = f(t)e^{-xt}$. Alors :

(i) Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}^+$

(ii) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = -tf(t)e^{-xt} = g_1(t)$ existe bien sur $]0, +\infty[^2$

(iii) Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$ est continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ d'après la question 4

(iv) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$

(v) Pour tout $a > 0$ on a pour $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}^+ : \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq t|f(t)|e^{-at}$ qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}^+$ toujours par la question 4 (hypothèse de domination locale en x).

Il en découle par le théorème de Leibnitz que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ $\square$

(b) Comme $g_1 \in E$ on peut lui appliquer le résultat précédent ce qui prouve que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que

$(f)'' = (-1)^2 \mathcal{L}(g_2)$. L'itération est claire et prouve que :

Si $f \in E$ alors $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$ $\square$

Comportement asymptotique de la transformée de Laplace

7. Théorème de la valeur initiale. Soit $f \in F$ et $N_\infty(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t)|$.

(a) Pour $x > 0$ il vient immédiatement $|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \frac{N_\infty(f)}{x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ $\square$

(b) Si on suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée alors $f' \in F$ d'après la question 5.

Donc par application du résultat précédent à f' et d'après la question 5 à nouveau : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$ $\square$

8. Théorème de la valeur finale

(a) Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$ il existe en particulier $A > 0$ tel que $|f(t)| \leq |\ell| + 1$ pour $t \geq A$. Par ailleurs f est bornée car continue sur le compact $[0, A]$. Il en découle que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc que $f \in F$. $\square$

(b) Il vient $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = a_n \int_0^{+\infty} f(t) e^{-a_n t} dt = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{a_n}\right) e^{-u} du$ par le changement de variable $t \mapsto u = a_n t$ qui est bien un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur lui-même puisque $a_n > 0$. $\square$

(c) La suite (h_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction h définie par $h(x) = \ell e^{-x}$ qui est continue (donc continue par morceaux) sur $]0, +\infty[$ et est dominée par $x \mapsto N_\infty(f) e^{-x}$ bien intégrable sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de la convergence dominée prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x) dx = \int_0^{+\infty} h(x) dx = \ell$

Il résulte alors de la question (b) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$ $\square$

(d) Le théorème de caractérisation séquentielle de la limite montre ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

En particulier si $\ell \neq 0$ alors $\mathcal{L}(f)(x) \sim \frac{\ell}{x}$ au voisinage de 0^+ $\square$

9. On suppose dans cette question f intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

(a) $R(x) = C - \int_1^x f(t) dt$ avec $C = \int_1^{+\infty} f(t) dt$ donc, en tant que fonction intégrale de sa borne supérieure d'une fonction continue, R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $R'(x) = -f(x)$ $\square$

Notons qu'on ne peut appliquer directement la question 5 à la fonction R (ou $-R$) qui n'a aucune raison d'être croissante. Mais comme R est $\mathcal{C}^1$ on peut bien intégrer par parties ce qui fournit :

$$\int_0^A f(t) e^{-xt} dt = \left[-R(t) e^{-xt} \right]_{t=0}^{t=A} - x \int_0^A R(t) e^{-xt} dt \quad (1) \quad \text{Or :}$$

- $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(t) e^{-xt} dt$ existe et vaut $\mathcal{L}(f)(x)$ puisque $f \in E$.

- $\lim_{A \rightarrow +\infty} R(A) e^{-xA} = 0$ car $R(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$ puisque f est intégrable et $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-xA} = 0$ également.

- R admettant une limite (en l'occurrence 0) en $+\infty$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ (question 8.a) donc appartient à $F \subset E$

Un passage à la limite dans (1) est ainsi licite et fournit $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$ $\square$

(b) On a évidemment $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = 0$ d'où, pour $\varepsilon > 0$ fixé positif quelconque, il existe bien $A > 0$ tel que $|R(t)| \leq \varepsilon$

pour $t \geq A$. Il vient alors $\left| \int_A^{+\infty} R(t) e^{-xt} dt \right| \leq \int_A^{+\infty} \varepsilon e^{-xt} dt = \frac{\varepsilon}{x}$

Par ailleurs $\left| \int_0^A R(t) e^{-xt} dt \right| \leq \int_0^A |R(t)| e^{-xt} dt \leq \int_0^A |R(t)| dt$

Il découle alors de la question précédente que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \text{t.q.} \quad |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon \quad \forall x > 0 \quad \square$$

(c) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x \int_0^A |R(t)| dt = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $0 \leq x \int_0^A |R(t)| dt \leq \varepsilon$ pour $0 < x \leq \alpha$

Il résulte alors de la question précédente que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{t.q.} \quad |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq 2\varepsilon \quad \forall x \in]0, \alpha]$$

En d'autres termes $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 en posant $\mathcal{L}(f)(0) = R(0) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ $\square$

Remarque : l'intégrabilité de f dans cette question 9 n'a en fait été utilisé que pour prouver $\lim_{A \rightarrow +\infty} R(A) = 0$. La conclusion est donc valable sous la simple hypothèse que l'intégrale de f est "improprement" convergente. Remarque d'ailleurs utilisée par l'énoncé à la fin du problème. Notons qu'avec l'hypothèse f intégrable, la conclusion s'obtient immédiatement par application du théorème de la convergence dominée.

Application : calcul de l'intégrale de Dirichlet

10. Commençons par remarquer que f est continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$ et qu'ainsi F est bien définie sur $[0, +\infty[$

(a) $F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\cos x}{x} - \int_{\pi/2}^x \frac{\cos t}{t^2} dt$ par une intégration par parties. Or $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$ (car dominée par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$) ce qui prouve que F admet en $+\infty$ une limite $\ell = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ $\square$

(b) $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)| dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{(n+1)\pi}$

Il en découle que $\sum u_n$ diverge.

Or si f était intégrable, $G(x) = \int_0^x |f(t)| dt$ admettrait une limite réelle ℓ' en $+\infty$ et en particulier on aurait (par caractérisation séquentielle de la limite) $\lim_{n \rightarrow +\infty} G((n+1)\pi) = \sum_{k=0}^n u_k = \ell'$ ce qui n'est pas car $\sum u_k$ diverge. $\square$

(c) $\int_0^X (\sin t) e^{-xt} dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^X e^{(-x+i)t} dt \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{-x+i} (e^{(-x+i)X} - 1) \right)$
 $= \frac{-1}{1+x^2} \operatorname{Im} \left((x+i)(e^{-xX}(\cos X + i \sin X)) - 1 \right)$
 $= \frac{-1}{1+x^2} (e^{-xX}(\cos X + x \sin X) - 1)$ $\square$

La fonction $t \mapsto (\sin t)e^{-xt}$ est bien sûr intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car continue et dominée par $t \mapsto e^{-xt}$ avec $x > 0$. $\square$

Par passage à la limite (licite de ce fait) ci-dessus on obtient $\int_0^{+\infty} (\sin t)e^{-xt} dt = \frac{1}{1+x^2}$ $\square$

(d) Commençons par remarquer que f est bien continue sur $\mathbb{R}^+$ et en outre classiquement bornée par 1. Ainsi elle appartient à F et donc a fortiori à E et il est bien licite d'envisager $\mathcal{L}(f)$.

Par ailleurs par la question 6.(a) il vient que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $\mathcal{L}(f) = -\mathcal{L}(g_1)$.

Or ici $g_1(t) = (\sin t)e^{-xt}$ de sorte que, par la question précédente, $\mathcal{L}(f)'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

Il en résulte que $\mathcal{L}(f)(x) = -\arctan x + C$ pour $x > 0$

D'après la question 7.(a) bien applicable puisque $f \in F$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ donc $C = \frac{\pi}{2}$ et ainsi :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x. \quad \square$$

D'après la remarque finale à la question 9, on peut appliquer le résultat de cette question 9 à la fonction f de sorte que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \frac{\pi}{2}$ $\square$

_____ FIN _____