ENAC 2017

Corrigé pour le contrôle a posteriori (par Pierre Abbrugiati).

Q1 A, D

Pour tout réel a et tout entier n on a $(aI)^n = a^n I$, et donc pour tout $i, j \in \{1,2,3\}$, $L_i((aI)^n) = C_i((aI)^n) = a^n$. La question A est donc correcte et la B est fausse car pour $a \notin \{0,1\}$ on a $a^n \neq a^{n-1}$.
Pour tout réel a et tout entier n on a $(aJ)^n = 3^{n-1}a^n J$, et donc pour tout $i, j \in \{1,2,3\}$, $L_i((aI)^n) = C_i((aI)^n) = 3^n a^n$. La question C est donc fausse et la D correcte.

Q2 D

On doit avoir $L_3(K) = C_1(K)$, *i. e.* $u - 1 = u - 2$, et donc $1 = 2$. Nope.

Q3 A,C

Les L_i et les C_j sont clairement des formes linéaires non nulles sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{M}$ est une intersection d'hyperplans, et en particulier un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Notons $s = a + b + c$, une matrice $M = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & z & t \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{M}$ si et seulement si on a $L_1(M) = s$ (*i. e.* $a+d+x = s$, *i. e.* $x = b+c-d$) et $L_2(M) = s$ (*i. e.* $b+e+y = s$, *i. e.* $y = a+c-e$) et $C_1(M) = s$ (c'est acquis) et $C_2(M) = s$ (*i. e.* $d+e+z = s$, *i. e.* $z = a+b+c-d-e$) et $L_3(M) = s$ (*i. e.* $c+z+t = s$, *i. e.* $t = a+b-z$ *i. e.* $t = -c+d+e$ d'après une équation précédente) et $C_3(M) = s$ (*i. e.* $x+y+t = s$, *i. e.* $x+y+z = a+b+c$ *i. e.* $a+b+c = a+b+c$ d'après les trois équations précédentes, donc c'est acquis). Finalement, M est dans $\mathcal{M}$ si et seulement si les équations de la proposition C sont vérifiées. Autrement dit $\mathcal{M}$ est engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et celles-ci formant une famille libre (elle est échelonée par rapport à la base canonique), c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 5.

On a donc vu que A et C sont vraies. Par unicité de la dimension et par incompatibilité des équations de B avec celles de C, les propositions B et D sont fausses.

Q4 B, C

On a $I_3 \in \mathcal{M}$ ce qui invalide clairement A et D.

Pour toute matrice A on a $AJ = \begin{pmatrix} L_1(A) & L_1(A) & L_1(A) \\ L_2(A) & L_2(A) & L_2(A) \\ L_3(A) & L_3(A) & L_3(A) \end{pmatrix}$ et $JA = \begin{pmatrix} C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \\ C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \\ C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \end{pmatrix}$ ainsi on a $AJ = JA \Leftrightarrow L_1(A) = C_1(A) = L_2(A) = C_2(A) = L_3(A) = C_3(A) \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}$. En bref : $\mathcal{M}$ est le commutant de J. Et bien sûr, pour $A \in \mathcal{M}(A)$ on a $AJ = s(A)J$ d'après le calcul précédent.

Q5 A

On a $I_3 \in \mathcal{M}$ ce qui invalide clairement B et C (cette dernière proposition étant d'ailleurs très mal rédigée).

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}$ alors on a $AJ = JA$ et $BJ = JB$ donc $ABJ = AJB = JAB$ et donc $AB \in \mathcal{M}$. Ce serait valable pour n'importe quel autre commutant. Donc A est vraie.

Enfin, si on a $C \in \mathcal{M} \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, alors on a $CJ = JC$ puis en multipliant à gauche et à droite par C^{-1} : $JC^{-1} = C^{-1}J$. Et donc $C \in \mathcal{M}$. Ce serait valable pour n'importe quel autre commutant. Donc D est fausse.

Q6 E

Toutes les valeurs proposées sont distinctes donc il ne peut y avoir qu'au plus une bonne réponse. Par linéarité de l'intégrale on a $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1} + x^{2n+3}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+2}$.

Q7 B

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$ on a $0 \leqslant x^{2n+3} \leqslant x^{2n+1}$ et $1+x^2 > 0$ donc $0 \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{1+x^2}$. Par croissance de l'intégrale, on déduit donc qu'on a $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et positive, donc minorée (par 0), et donc elle converge (par TLM). La proposition B est donc correcte.

La suite n'est clairement pas constante (cela contredirait la question précédente) donc A est fausse.

La proposition C n'a aucun sens (la variable n apparaît sans avoir été quantifiée ni introduite). L'interprétation la plus raisonnable qu'on puisse en faire me semble être « si une suite de fonctions $(f_n)_n$ est dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ alors la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ converge, il suffit donc d'appliquer ce résultat dans le cas particulier qu'on a ici ». Ce qui est faux et même assez grostesque (mais c'est vraiment l'interprétation la moins déraisonnable de la proposition).

La proposition D par contre, a bien un sens. Elle est vraie. Mais elle n'est certainement pas attendue comme une bonne réponse. Là encore, il est malheureusement assez certain qu'on a ici une maladresse et que l'énoncé auquel pensaient les concepteurs du sujet était « si une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle alors la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ converge, il suffit donc d'appliquer ce résultat dans le cas particulier qu'on a ici ». Ce qui, pour le coup, est faux.

Q8 B, C

Par positivité de la suite on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \leqslant I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+2}$.
Donc B et C sont vraies (on achève la bête avec le théorème des gendarmes), ou du moins le seraient si elles avaient un sens, ce pour quoi il suffirait de quantifier la variable n.

Comme il existe au plus deux réponses correctes, il faut croire qu'on a, du moins pour certains n, $I_n > \dfrac{1}{2n+3}$. $\left(\text{Et effectivement, on a } I_0 = \dfrac{\ln(2)}{2} > \dfrac{1}{3}\text{... une fois rentré à la maison.}\right)$

Q9 D

La stricte décroissance[1] de $(I_n)_n$ et des considérations de signe montrent qu'on a au plus une réponse correcte. La récurrence permettant d'obtenir D est sans astuce.

Q10 A

Clairement au plus une bonne réponse. On fait une IPP.

Q11 D

Il est connu qu'on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) \neq -\ln(2)$.

J'insiste pour la suite : cela se reformule en $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k}}{k} = -\ln(2) \neq \ln(2)$.

Donc A, B et C sont fausses.

Pour D, il ne reste plus qu'à remarquer qu'on a, par croissance de l'intégrale,
$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2})^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{2n+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+4} \leqslant \frac{1}{2n+3}$.

Q12 B

La proposition C est grotesque. La série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, de somme $\ln(2)$, est alternée et de premier terme $1 = \ln(\mathrm{e}) > \ln(2)$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2)$ est du signe de $(-1)^n$ ce qui écarte D.

1. Qui peut se montrer comme la décroissance.

Maintenant, la 11 implique qu'on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = o(1)$ donc la 10 donne $I_n = \dfrac{1}{4(n+1)} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et donc $I_n \sim \dfrac{1}{4(n+1)} \sim \dfrac{1}{4n}$. Puis en multipliant par $2(-1)^{n-1}$: $2(-1)^{n-1} I_n \sim \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$.
Et enfin, avec la question 9, on obtient la B, qui exclut la A.

Dans l'énoncé et toutes les questions de la partie III, la variable n n'est ni quantifiée ni introduite ☹.

Q13 A
Manifestement au plus une bonne réponse. La formule des probabilités totales donne $p_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{3}(1 - p_n)$ et donc A.

Q14 B
Résultat classique sur les suites arithmético-géométriques : si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(u_0 - \dfrac{\beta}{1-\alpha}\right)\alpha^n + \dfrac{\beta}{1-\alpha}$. Ce qui, ici, donne B, en interprétant l'énoncé par $p_0 = \dfrac{1}{2}$. Là encore, il est manifeste qu'il y a au plus une bonne réponse.

Q15 E.
Formule des probabilités totales : pour $n \geq 1$ on a $p(F_n) = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{2}{3}(1 - p_n)$. Ce qui donne après calcul $p(F_n) = -\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n+1} + \dfrac{3}{5}$, qui n'est pas dans la liste et n'est compatible avec aucune des propositions.

Q16 C
C'est encore la formule des probabilités totales (ils connaissent que ça c'est pas possible). Pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $\left\{\begin{array}{l} p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n \end{array}\right.$. On peut l'écrire matriciellement $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. En notant qu'on a $\left\{\begin{array}{l} p_0 = \frac{45}{100} \\ q_0 = \frac{25}{100} \\ \text{(et donc) } r_0 = \frac{30}{100} \end{array}\right.$, une récurrence immédiate donne $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 45/100 \\ 25/100 \\ 30/100 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 45/100 & 25/100 & 30/100 \end{pmatrix}$. Parmi les quatre proprositions, seule la C convient.

Q17 B
En vue de résoudre l'exercice, il s'agit de réduire la matrice $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont 1, $1/12$ et $-1/4$ (et non pas $1/4$) donc la C est fausse. Après calcul, la B est vraie.
Examinons les propositions A et D bien que la matrice $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ à réduire dans ces questions soit sans intérêt pour notre exercice. Ses valeurs propres sont 1, $1/12$ et 0 (et non pas $1/4$ ni $-1/4$) donc A et D sont fausses.

Q18 C
On demande les limites de $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ et $(r_n)_n$. En notant P la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/12)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/4)^n \end{pmatrix} \times P^{-1} \times \begin{pmatrix} 45/100 \\ 25/100 \\ 30/100 \end{pmatrix} \to P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times P^{-1} \times \begin{pmatrix} 45/100 \\ 25/100 \\ 30/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 4/11 \\ 4/11 \end{pmatrix}$.
Donc C.

Q19 D ?
J'aurais zappé la question.

Après calcul les énoncés B, C et D sont vrais alors que $x=y=z=t=1$ constitue un contre-exemple à A.

Comme D est valable dans tout anneau, elle explique bien que $S_2(A)$ est multiplicatif quel que soit l'anneau commutatif A. Il n'est cependant pas clair que A est un anneau. On nous dit seulement « A est muni des mêmes lois que par exemple l'ensemble des nombres réels ou des nombres complexes », ce qui ne veut rien dire (l'ensemble des quaternions est-il « muni des mêmes lois que par exemple l'ensemble des nombres réels ou des nombres complexes » ?). Pour C, c'est pire, elle n'a *a priori* de sens que dans un sous-anneau de $\mathbb{C}$, mais elle explique bien que $S_2(A)$ est multiplicatif quel que soit le sous-anneau A de $\mathbb{C}$ (mais pas que $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ est multiplicatif par exemple). Pour B, c'est encore pire, elle n'a de sens que dans un sous-anneau de $\mathbb{C}$ mais n'explique pas que $S_2(A)$ est multiplicatif même si A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

J'imagine que la réponse attendue est D. La question manque en tout cas (pour le moins) de clarté.

Q20 A

Les carrés modulo 8 sont $\overline{0}$, $\overline{1}$ et $\overline{4}$ donc B et C sont faux. On a $\overline{6} = \overline{2}^2 + \overline{1}^2 + \overline{1}^2 \in S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ et donc D est faux. Je ne détaille pas tous les calculs montrant que A est vraie, c'est pénible mais ça ne nécessite aucune réflexion.

Q21 D

On commence par remarquer que si k est impair alors $k^2 \equiv 1\ [8]$ (il suffit de calculer $\overline{1}^2$ et $\overline{3}^2$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, puisqu'on y a $\overline{5} = -\overline{3}$ et $\overline{7} = -\overline{1}$).

Ainsi, si les quatre entiers a, b, c, d sont impairs alors $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 1+1+1+1 \not\equiv 0\ [8]$.
Mais si exactement un ou exactement trois des entiers a, b, c, d est (sont) impair(s) alors $a^2+b^2+c^2+d^2$ est impair donc ne peut pas être congru à 0 modulo 8.
Enfin si exactement deux des entiers a, b, c, d sont impairs, on peut supposer à renommage près qu'il s'agit de a et b, de sorte que c et d peuvent sécrire sous la forme $c = 2p$, $d = 2q$, et finalement $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 2 + 4(p^2+q^2)\ [8]$. Si p^2+q^2 est pair alors $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 2 \not\equiv 0\ [8]$ et si p^2+q^2 est impair alors $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 6 \not\equiv 0\ [8]$.
En conclusion, il est impossible que un, deux, trois ou les quatre entiers a, b, c et d soient impairs ; ils sont donc tous pairs.

Q22 B

Soit $n \equiv -1\ [8]$.

Montrons tout d'abord $n \notin S_3(\mathbb{Z})$ par l'absurde. Supposons qu'il existe a, b, c dans $\mathbb{Z}$ tels que $n = a^2+b^2+c^2$. Modulo 8, on obtient $a^2+b^2+c^2+1^2 \equiv 0\ [8]$. C'est impossible d'après la question 21.

Montrons maintenant $n \notin S_3(\mathbb{Q})$ par l'absurde. Supposons qu'il existe u, v, w dans $\mathbb{Q}$ tels que $n = u^2+v^2+w^2$. On peut écrire u, v, w sous la forme $u = \frac{a'}{a}$, $u = \frac{b'}{b}$, $u = \frac{c'}{c}$ (formes non nécessiarement irréductibles). En réinjectant on trouve

$$n(abc)^2 = (a'bc)^2 + (ab'c)^2 + (abc')^2 \quad (*).$$

Notons $v = \min\big(v_2(abc), v_2(a'bc), v_2(ab'c), v_2(abc')\big)$ de sorte que 2^v divise les quatre nombres abc, $a'bc$, $ab'c$, abc'. En divisant l'égalité $(*)$ par 2^{2v} on obtient une égalité de la forme $n\lambda^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ où au moins un des entiers α, β, γ, λ est impair. En réduisant modulo 8 on obtient $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\lambda^2 \equiv 0\ [8]$, ce qui est impossible puisqu'un des quatre entiers n'est pas pair.

Q23 B

On a, de façon évidente, $3 = 1^2+1^2+1^2 \in S_3(\mathbb{Q})$ $5 = 2^2+1^2+0^2 \in S_3(\mathbb{Q})$, et comme $15 \equiv -1\ [8]$, d'après la question précédente, $15 \notin S_3(\mathbb{Q})$. Comme on a $15 = 3 \times 5$, $S_3(\mathbb{Q})$ n'est pas multiplicatif. Donc A est fausse et B est vraie. Le même argument montre que $S_3(\mathbb{Z})$ n'est pas multiplicatif donc C et D sont fausses aussi.

Q24 E

La matrice P de la famille $(u_, u_2, u_3)$ dans la base $\mathcal{B}$ est composée des décompositions <u>en colonne</u> de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$. Il s'agit donc de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ qui n'est pas dans la liste.

Q25 A
C'est ce qu'on trouve après calcul.

Q26 C, D
La famille est bien une base.

Le fait que la famille comporte trois vecteurs ne suffit pas à établir que c'est une base, on écarte donc B en imaginant qu'elle sous-entend ceci. La famille n'est pas liée donc on écarte A. Le fait que la matrice des vecteurs d'une famille dans une base soit inversible implique que cette famille est une base est vrai, et P est bien inversible, on valide donc D. Le fait qu'une famille composée de $\dim(E)$ vecteurs implique que cette famille est une base est vrai, et bien sûr c'est le cas de notre famille, on valide donc C.

Q27 B
On aura reconnu que p_F est la projection sur F parallèlement à G et p_G la projection sur G parallèlement à F. C'est donc du cours tout simplement.

Q28 D
Idem.

Q29 E
On a $P = Mat_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}id$ donc $A_F = PQP^{-1}$ et $A_G = PQ'P^{-1}$ (on peut aussi calculer A_G à l'aide de $A_F + A_G = I_3$). On trouve $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_G = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On ne les trouve pas dans la liste.

Remarque : on peut aussi simplement vérifier qu'aucune des réponses proposées ne convient à l'aide de considérations simples sur les images et les noyaux. Par exemple : dans A, B et D, on a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Ker}(A_G)$; dans A, C et D on a $\mathrm{Im}(A_F) \subset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Q30 B
On dérive l'expression de droite. Seule celle de B donne la bonne expression.

Q31 B, C
La fonction est continue sur son domaine de définition par théorèmes généraux. Ce domaine de définition est bien $\mathbb{R}$ car $\cos^2(t) + x\sin^2(t)$ est une somme de termes positifs, donc ne peut s'annuler que si les deux termes sont nuls, et comme $x > 0$ cela implique $\cos(t) = \sin(t) = 0$, ce qui n'est vrai pour aucune valeur de t.

A et D sont grossièrement faux car f est définie sur $\mathbb{R}$ alors que les courbes obtenues sont celles de fonctions qui ne le sont pas.
En connaissant ses formules trigonométriques, on observe qu'on a, pour tout réel t : $\begin{cases} f(-t) = f(t) \\ f(\pi + t) = f(t) \\ f(pi - t) = f(t) \end{cases}$. Ainsi f est paire, π-périodique, et $\mathcal{C}_f$ a pour axe de symétrie la droite déquation $x = \frac{\pi}{2}$.
Donc B et C sont vrais.

Q32 D
Par théorèmes généraux, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' = t \mapsto \dfrac{2\cos(t)\sin(t)(1-x)}{\left(\cos(t)^2 + x\sin(t)^2\right)^2}$.

Donc D est vraie. La question est posée de façon très ambiguë mais on peut raisonnablement estimer que c'est la seule réponse attendue.

Q33 C, D

Encore une fois, la variable t n'est ni quantifiée ni introduite. C'est usant. Pour $x = 1$ on a évidemment f constante de valeur 1. Sinon, le calcul de la question précédente permet d'étudier f sur l'intervalle $[0, \pi]$. La dérivée s'annule uniquement en 0, $\frac{\pi}{2}$ et π. Avec le signe de la dérivée on constate que :

- si $x < 1$ elle atteint son minimum 1 en 0 et π et son maximum $1/x$ en $\pi/2$;
- si $x > 1$ elle atteint son maximum 1 en 0 et π et son minimum $1/x$ en $\pi/2$.

Bien sûr, par périodicité il en va de même sur les $k\pi$ et les $k\pi + \pi/2$, et on a des tangentes horizontales en tous ces points.

Q34 A, D

On a A d'après la symétrie d'axe $D : x = \pi/2$. Ainsi (sauf $x = 1$), B est fausse. Bien sûr, par linéarité, on a aussi $I = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{a\to\pi/2} \int_0^{a} \frac{2}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$. La dernière égalité demande que, x étant fixé, f soit primitivable (donc sa continuité suffit) et n'a pas de lien avec la continuité de $x \mapsto f(t)$.

Q35 B

Calcul direct, no astuce.

Q36 C

Idem.