ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE
DE LA METALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE

Option M MATHEMATIQUES II (4 h) 1983

Conventions:

1°) Soit m un entier naturel, C^m désignera l'ensemble des applications de $I = [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent des dérivées continues sur I jusqu'à l'ordre m inclus. Par exemple, C^0 sera l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{R}$.

De la même façon, Γ^m sera l'ensemble des applications de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent des dérivées continues sur $[0, +\infty[$ jusqu'à l'ordre m inclus.

2°) Il est conseillé aux candidats de traiter les différentes parties dans l'ordre de l'énoncé ; cependant :

. la partie IV est indépendante des parties I, II et III.

. la partie V utilise un résultat de la partie IV.

Les fonctions étant réelles, $f(t)^2$ désignera le carré du réel $f(t)$.

Résultats préliminaires

1°) Soient a et b deux réels ; démontrer les inégalités :

$$2|a\,b| \leq a^2 + b^2$$

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

Quand y a-t-il égalité ?

2°) Soient x et x_1 deux éléments de I, f un élément de C^0.

Montrer l'inégalité :

$$\left(\int_{x_1}^{x} f(t)\,dt\right)^2 \leq (x - x_1) \int_{x_1}^{x} f(t)^2\,dt$$

Indication : admettre l'inégalité de Schwarz.

PARTIE I

Soit f un élément de C^1.

1°) Montrer les relations :

$$\forall (x, x_1) \in I \times I, \qquad f(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^{x} f'(t)\,dt,$$

$$\forall (x, x_1) \in I \times I, \qquad f(x)^2 \leq 2\,f(x_1)^2 + 2(x - x_1) \int_{x_1}^{x} f'(t)^2\,dt.$$

2°) Déduire de ces relations les propriétés :

$$\forall x \in I, \quad \forall x_1 \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \qquad f(x)^2 \leq 2\,f(x_1)^2 + \frac{4}{3} \int_0^1 f'(t)^2\,dt,$$

$$\forall x \in I, \quad \frac{1}{3} f(x)^2 \leq 2 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(t)^2\,dt + \frac{4}{9} \int_0^1 f'(t)^2\,dt.$$

3°) Etablir l'inégalité :

$$\text{(I)} \qquad \int_0^1 f(t)^2\,dt \leq 6 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(t)^2\,dt + \frac{4}{3} \int_0^1 f'(t)^2\,dt$$

4°) Pour quelles applications f appartenant à C^1, l'inégalité (I) devient-elle une égalité ?

.../...

PARTIE II

L'objectif de cette partie est d'obtenir une généralisation de l'inégalité (I). Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$.

1°) Montrer, en suivant la même méthode qu'à la partie I, qu'il existe deux polynômes p et q du premier degré tels que, pour toute fonction f appartenant à C^1, il vienne :

$$\text{(II)} \qquad \int_0^1 f(t)^2\,dt \leq \frac{1}{p(\alpha)} \int_\alpha^{1-\alpha} f(t)^2\,dt + q(\alpha) \int_0^1 f'(t)^2\,dt$$

avec $\quad p(\frac{1}{3}) = \frac{1}{6}, \quad q(\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}.$

2°) Pour quelles applications f appartenant à C^1, l'inégalité (II) devient-elle une égalité ?

PARTIE III

L'objectif de cette partie est de généraliser une nouvelle fois la relation (I), et d'en déduire pour les fonctions f de C^1 l'inégalité (IV).

1°) Soient α et β deux réels, appartenant à I, vérifiant les inégalités :

$$0 \leq \alpha, \quad 0 \leq \beta, \quad \alpha + \beta < 1.$$

Montrer, en suivant la même méthode que dans la partie I, qu'il existe deux fonctions u et v définies et continues sur $I \times I$, symétriques ($u(\alpha, \beta) = u(\beta, \alpha)$, $v(\alpha, \beta) = v(\beta, \alpha)$) telles que, pour toute fonction f de C^1, il vienne :

$$\text{(III)} \qquad \int_0^1 f(t)^2\,dt \leq u(\alpha, \beta) \int_\alpha^{1-\beta} f(t)^2\,dt + v(\alpha, \beta) \int_0^1 f'(t)^2\,dt$$

avec $\quad u(\alpha, \alpha) = \frac{1}{p(\alpha)}, \quad v(\alpha, \alpha) = q(\alpha).$

Pour quelles applications f de C^1, l'inégalité (III) devient-elle une égalité ?

2°) A l'aide de l'inégalité (III), montrer :

$$\exists\, (k, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad : \quad \forall f \in C^1, \quad \forall x \in I$$

$$\text{(IV)} \qquad \int_0^1 f(t)^2\,dt \leq k\, f(x)^2 + r \int_0^1 f'(t)^2\,dt$$

PARTIE IV

L'objectif de cette partie est de montrer que, pout tout élément f de C^2, il vient :

$$\text{(V)} \qquad \int_0^1 f'(t)^2\,dt \leq 54 \int_0^1 f(t)^2\,dt + 2 \int_0^1 f''(t)^2\,dt$$

1°) Soit α un réel tel que : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Sachant que pour tout couple (x_1, x_2) tel que :

$$x_1 \in [0, \alpha], \quad x_2 \in [1 - \alpha, 1],$$

il existe un réel $\eta \in]x_1, x_2[$ tel que :

$$f'(\eta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

montrer :

$$|f'(\eta)| \leq \frac{1}{1-2\alpha}\Big(|f(x_1)| + |f(x_2)|\Big)$$

Déduire de cette relation l'inégalité plus générale

$$\forall\, x \in I \qquad |f'(x)| \leq \frac{1}{1-2\alpha}\Big(|f(x_1)| + |f(x_2)|\Big) + \int_0^1 |f''(t)|\,dt$$

où x_1 et x_2 sont les réels introduits ci-dessus.

2°) Déduire des résultats précédents :

$$\forall\, x \in I \qquad |f'(x)| \leq \frac{1}{\alpha\,(1-2\alpha)}\left\{\int_0^{\alpha} |f(t)|\,dt + \int_{1-\alpha}^{1} |f(t)|\,dt\right\} + \int_0^1 |f''(t)|\,dt$$

$$\forall\, x \in I \qquad f'(x)^2 \leq \frac{4}{\alpha\,(1-2\alpha)^2}\left\{\int_0^{\alpha} f(t)^2\,dt + \int_{1-\alpha}^{1} f(t)^2\,dt\right\} + 2\int_0^1 f''(t)^2\,dt$$

3°) Démontrer à partir des résultats précédents la relation (V).

PARTIE V

Soit E l'ensemble des éléments g de C^2, tels que l'intégrale $\int_0^{\infty} g(t)^2\,dt$ soit convergente.

1°) Montrer brièvement que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Est-il de dimension finie ?

2°) Soit E_1 le sous-ensemble des éléments de E pour lesquels l'intégrale $\int_0^{\infty} g''(t)^2\,dt$ est convergente.

Montrer brièvement que E_1 est un sous-espace vectoriel de E ; est-ce que E_1 est de dimension finie ?

3°) Soit h une fonction appartenant à E_1 ; montrer que l'intégrale $\int_0^{\infty} h'(t)^2\,dt$ est aussi convergente.

En déduire que l'intégrale $\int_0^{\infty} |h(t)\,h'(t)|\,dt$ est convergente. Démontrer par suite que h(t) tend vers 0 lorsque t croît indéfiniment. En est-il de même pour h' ?

Montrer que E est différent de E_1 en considérant la fonction :

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\[4pt] \dfrac{\sin(x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4°) Soit h un élément de E_1 ; montrer l'inégalité :

$$\text{(VI)} \qquad \int_0^{\infty} h'(t)^2\,dt \leq \int_0^{\infty} h(t)^2\,dt + \int_0^{\infty} h''(t)^2\,dt$$

Indication : considérer l'expression, où A est un réel positif :

$$I(A) = \int_0^{A} \left\{ h(t)^2 - h'(t)^2 + h''(t)^2 - \Big(h(t) + h'(t) + h''(t)\Big)^2 \right\} dt$$

Pour quelles fonctions de E_1 l'inégalité (VI) est-elle une égalité ?