

I-Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Q 1. - La fonction nulle est harmonique sur U .

- Soit $f, g \in \mathcal{H}(U)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g \in \mathcal{C}^2$ et $\forall i \in [[1, n]]$, $\frac{\partial^2(f + \lambda g)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$,

ce qui donne en sommant $\Delta(f + \lambda g) = \Delta(f) + \lambda \Delta(g) = 0$.

On conclut que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U)$.

Q 2. Quitte à faire une récurrence sur l'ordre d'une dérivée partielle, il suffit de montrer que les dérivées premières d'une fonction harmonique sont aussi harmoniques.

Soit f une fonction de $\mathcal{H}(U)$ de classe \mathcal{C}^∞ , le théorème de Shwarz assure que le calcul d'une dérivée partielle

ne dépend pas de l'ordre des variables, alors $\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(0) = 0$.

Q 3. - Soit $f \in \mathcal{H}(U)$ tel que $f^2 \in \mathcal{H}(U)$, alors $\forall x \in U$,

$$\Delta(f^2)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2}(x) = 2f(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) + 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^2 = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^2 = 2\|grad(f)(x)\|^2 = 0,$$

donc $df = 0$ sur U qui est connexe par arcs, et par suite f est constante sur U .

- Réciproquement si f est constante, alors f et f^2 sont harmoniques.

Q 4. $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$ est harmonique, mais $\Delta(f^2)(x) = 2 \neq 0$, donc $f \in \mathcal{H}(U)$, mais $f^2 \notin \mathcal{H}(U)$.

II - Exemples de fonctions harmoniques

II.A

Q 5. f étant harmonique sur \mathbb{R}^2 , donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\Delta(f)(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0$, or f est non nulle, donc $\exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u(x_0)v(y_0) \neq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u''(x)v(y_0) + u(x)v''(y_0) = 0$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, $u''(x_0)v(y) + u(x_0)v''(y) = 0$, alors en posant

$$\lambda = \frac{v''(y_0)}{v(y_0)} = -\frac{u''(x_0)}{u(x_0)}, \text{ on aura } u'' + \lambda u = 0 \text{ et } v'' - \lambda v = 0.$$

Q 6. Les équations caractéristiques sont respectivement $r^2 + \lambda = 0$ et $r^2 - \lambda = 0$.

Cas $\lambda > 0$: $u \in Vect(\cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x))$ et $v \in Vect(\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}y), \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}y))$, donc

$f(x, y) = (A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x))(C\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}y) + D\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}y))$ où A, B, C, D des réels.

Cas $\lambda < 0$: $u \in Vect(\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x), \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x))$ et $v \in Vect(\cos(\sqrt{-\lambda}y), \sin(\sqrt{-\lambda}y))$, donc

$f(x, y) = (A\cos(\sqrt{-\lambda}y) + B\sin(\sqrt{-\lambda}y))(C\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + D\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x))$ où A, B, C, D des réels.

II.B

Q 7. L'application $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est à composantes de classe \mathcal{C}^2 , donc $g = f \circ \varphi$ est de classe \mathcal{C}^2 comme composée de deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 .

Q 8. On pose $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, alors $g(r, \theta) = f(x, y)$, donc

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial r} = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}}$$

Q 9. La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 , donc d'après le théorème de Shwarz, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \\ &= \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial r} + \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial r} + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial r} + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial r} = \\ &= \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin(\theta)\cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin(\theta)\cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-r\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} \right) = -r\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + r\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} - r\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + r\cos(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \\ &= -r\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + r\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} - r\sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \theta} - r\sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial \theta} + r\cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \theta} + r\cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \\
&= -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

Q 10. Des égalités précédentes, on obtient $r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial g}{\partial r} = r^2\Delta f$, donc

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\Delta f(x,y) = 0$ si et seulement si,

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \quad r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial g}{\partial r} = 0.$$

Q 11. Soit f une fonction harmonique radiale de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0$, donc

$g(r,\theta) = h(r)$ où $h : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 vérifiant $rh''(r) + h'(r) = 0$, donc $h'(r) = \frac{A}{r}$ et par suite $h(r) = A\ln(r) + B$ où $A, B \in \mathbb{R}$.

Q 12. On va essayer de chercher une fonction harmonique radiale de la forme $h(r) = A\ln(r) + B$ avec $h(r_1) = a$ et $h(r_2) = b$, on obtient un système simple à résoudre qui donne $A = \frac{b-a}{\ln(r_2) - \ln(r_1)}$ et $B = \frac{a\ln(r_2) - b\ln(r_1)}{\ln(r_2) - \ln(r_1)}$,

donc $f(x,y) = h(r) = h(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{A}{2}\ln(x^2 + y^2) + B$.

II.C

Q 13. f n'est pas identiquement nulle, donc $\exists (r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ tel que $u(r_0)v(\theta_0) \neq 0$.

La fonction $\theta \mapsto f(r_0\cos(\theta), r_0\sin(\theta)) = u(r_0)v(\theta)$ est 2π -périodique, donc $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $u(r_0)v(\theta + 2\pi) = u(r_0)v(\theta)$, or $u(r_0) \neq 0$, donc $v(\theta + 2\pi) = v(\theta)$, ce qui assure la périodicité de v .

Q 14. Supposons toujours $u(r_0)v(\theta_0) \neq 0$ et que f est harmonique, l'équation de la question Q10. s'écrit $r^2u''(r)v(\theta) + u(r)v''(\theta) + ru'(r)v(\theta) = 0$, donc avec $\theta = \theta_0$, on obtient $\forall r \in \mathbb{R}^{*+}$, $r^2u''(r) + ru'(r) - \lambda u(r) = 0$ où on a posé $\lambda = -\frac{v''(\theta_0)}{v(\theta_0)}$.

et avec $r = r_0$, on aura $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $v''(\theta) + \frac{r_0^2u''(r_0) + r_0u'(r_0)}{u(r_0)}v(\theta) = 0$, or $r_0^2u''(r_0)v(\theta_0) + u(r_0)v''(\theta_0) + r_0u'(r_0)v(\theta_0) = 0$, donc $\lambda = -\frac{v''(\theta_0)}{v(\theta_0)} = \frac{r_0^2u''(r_0) + r_0u'(r_0)}{u(r_0)}$, ce qui donne $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $v''(\theta) + \lambda v(\theta) = 0$

II.C.1) On suppose $\lambda = 0$.

Q 15. Les solutions de (II.2) sont les polynômes de degré 1 qui sont périodiques, donc se sont les fonctions constantes.

Q 16. L'équation (II.1) s'écrit $rz''(r) + z'(r) = 0$, donc les solutions sont les fonctions définies sur \mathbb{R}^{*+} par $z(r) = A\ln(r) + B$ où $A, B \in \mathbb{R}$.

Q 17. La fonction nulle répond à la question.

Si la solution n'est pas nulle, d'après les questions Q15 et Q16, $v(\theta) = Cte$ et $u(r) = A\ln(r) + B$, donc $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \alpha\ln(r) + \beta$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

II.C.2) On suppose $\lambda \neq 0$.

Q 18. Si $\lambda > 0$, L'ensemble de solutions de (II.2) est $Vect(\cos(\theta\sqrt{\lambda}), \sin(\theta\sqrt{\lambda}))$,

ces solutions sont 2π -périodiques.

Si $\lambda < 0$, L'ensemble de solutions de (II.2) est $Vect(ch(\theta\sqrt{-\lambda}), sh(\theta\sqrt{-\lambda}))$, ces solutions ne sont pas périodiques.

On conclut que la condition nécessaire et suffisante est $\lambda > 0$ et les solutions sont de la forme

$$z(\theta) = \alpha\cos(\theta\sqrt{\lambda}) + \beta\sin(\theta\sqrt{\lambda}) \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Q 19. Soit $z \in \mathcal{C}^2$ sur \mathbb{R}^{*+} , $Z = zoexp$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} vérifiant $Z'oln = z$.

$\forall r > 0$, $z'(r) = \frac{1}{r}Z'(\ln(r))$, $z''(r) = -\frac{1}{r^2}Z'(\ln(r)) + \frac{1}{r^2}Z''(\ln(r))$, donc z vérifie (II.1) si et seulement si, $\forall r > 0$, $r^2z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = 0$ si et seulement si, $\forall r > 0$, $Z''(\ln(r)) - \lambda Z(\ln(r)) = 0$ si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}$, $Z''(t) - \lambda Z(t) = 0$.

Si $\lambda > 0$, $Z(t) = Ach(t\sqrt{\lambda}) + Bsh(t\sqrt{\lambda})$ et si $\lambda < 0$, $Z(t) = A\cos(t\sqrt{-\lambda}) + B\sin(t\sqrt{-\lambda})$, ce qui donne

$$z(r) = Z(\ln(r)) = \begin{cases} Ach(\sqrt{\lambda}\ln(r)) + Bsh(\sqrt{\lambda}\ln(r)) & \text{si } \lambda > 0 \\ A\cos(\sqrt{-\lambda}\ln(r)) + B\sin(\sqrt{-\lambda}\ln(r)) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Q 20. Déjà le cas $\lambda < 0$ la limite en 0^+ de la solution n'existe pas.

Dans le cas $\lambda > 0$ l'ensemble de solution est $Vect(ch(\sqrt{\lambda}\ln(r)), sh(\sqrt{\lambda}\ln(r))) = Vect(exp(\sqrt{\lambda}\ln(r)), exp(-\sqrt{\lambda}\ln(r)))$, donc l'ensemble de solutions prolongeables par continuité en 0^+ est la droite $Vect(exp(\sqrt{\lambda}\ln(r)))$.

III Principe du maximum faible

III.A

Q 21. U borné, donc $\exists R > 0$ tel que $U \subset \overline{D(0, R)}$, donc $\overline{U} \subset \overline{D(0, R)}$, ainsi \overline{U} est un fermé borné de \mathbb{R}^n , donc \overline{U} est compact et vu que f est continue sur \overline{U} , alors f est bornée et atteint ses bornes, en particulier f admet un maximum en un point x_0 de \overline{U} .

Q 22. Raisonnons par l'absurde et supposons que $x_0 \notin \partial U$, alors $x_0 \in U$ et par suite x_0 est un point critique de f , à savoir $df(x_0) = 0$, de plus $\Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_0) > 0$, donc $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$.

$x_0 \in U$ qui est ouvert, donc $\exists r > 0$ tel que $D(x_0, r) \subset U$, donc $\forall t \in]-r, r[$ $x_0 + te_i \in U$, on définit sur $] -r, r[$ la fonction $\varphi(t) = f(x_0 + te_i)$.

φ est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -r, r[$ admet un maximum en 0, donc $\varphi''(0) \leq 0$, or $\forall t \in] -r, r[$ $\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0 + te_i)$,

donc $\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$, ce qui contredit que $\varphi''(0) \leq 0$.

$U \subset \overline{U}$, donc $\sup_{y \in U} f(y) \leq \sup_{y \in \overline{U}} f(y) = \sup_{y \in \partial U} f(y) = f(x_0)$, or $x_0 \notin U$, donc l'inégalité est stricte.

III.B

Q 23. L'application $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ est polynômiale, donc continue sur \overline{U} et de classe \mathcal{C}^2 sur U , et f continue sur \overline{U} , de classe \mathcal{C}^2 sur U , donc g_ε l'est aussi.

Soit $x \in U$, $\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + 2\varepsilon x_i$ et $\frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) + 2\varepsilon$, donc $\Delta g_\varepsilon(x) = \Delta f(x) + 2n\varepsilon$, or f est harmonique, donc $\Delta g_\varepsilon(x) = 2n\varepsilon > 0$

Q 24. Soit $x \in U$, alors $\|x\| \leq M$ où M bornant U .

g_ε est continue sur \overline{U} de classe \mathcal{C}^2 sur U et $\Delta g_\varepsilon(x) > 0$, donc d'après la question Q22,

$$f(x) + \varepsilon \|x\|^2 = g_\varepsilon(x) < \sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(y) \leq \sup_{y \in \partial U} f(y) + M^2 \varepsilon,$$

ce qui donne en tendant ε vers 0 l'inégalité $f(x) \leq \sup_{y \in \partial U} f(y)$.

Q 25. Posons $f = f_1 - f_2$, alors f est continue sur \overline{U} de classe \mathcal{C}^2 harmonique sur U et nulle sur ∂U .

D'après la question précédente, $f \leq 0$ sur U , or $-f$ vérifie les mêmes hypothèses que f , donc $-f \leq 0$ sur U , ce qui affirme que f est nulle sur U .

IV Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

IV.A

Q 26. Soit $r \in]0, R[$ et posons $u_n(x, y) = a_n(x + iy)^n$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $D(0, r)$.

- La série de fonctions $\sum_n u_n$ converge simplement vers f sur $D(0, r)$ via le développement en série entière de f sur $D(0, 1)$.

- $\forall (x, y) \in D(0, r)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|na_n(x + iy)^{n-1}| = |ina_n(x + iy)^{n-1}| \leq n|a_n|r^{n-1}$ et $\sum_n na_n r^{n-1}$ converge

absolument, donc Les séries de fonctions $\sum_n \frac{\partial u_n}{\partial x} = \sum_n na_n(x + iy)^{n-1}$ et $\sum_n \frac{\partial u_n}{\partial y} = i \sum_n na_n(x + iy)^{n-1}$ convergent normalement sur $D(0, r)$.

Ainsi f admet des dérivées partielles continues sur $D(0, r)$ pour tout $r \in]0, R[$, donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur $D(0, R)$ et on a

$$\forall (x, y) \in D(0, R), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = i \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x + iy)^{n-1} = i \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Les dérivées partielles de f sont développables en série entière sur $D(0, 1)$, donc sont de classe \mathcal{C}^1 et par récurrence f est de classe \mathcal{C}^∞ .

Q 27. Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x + iy)^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x + iy)^{n-1}$ ont même rayon de convergence, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont

de classe \mathcal{C}^1 sur $D(0, 1)$, d'où f est de classe \mathcal{C}^2 sur $D(0, R)$, de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x + iy)^{n-2}$,

donc f est harmonique, ce qui entraîne que u et v sont aussi harmoniques sur $D(0, R)$.

IV.B

Q 28. Montrons l'existence d'une suite $(b_n)_n$ de complexes tel que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x + iy)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x + iy)^n \right) = 1$.

Le produit de Cauchy donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a_k b_{n-k} \right) (x + iy)^n = 1$, ce qui conduit au système

$$a_0 b_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, \sum_{k=0}^n C_n^k a_k b_{n-k} = 0.$$

f ne s'annule pas sur $D(0, R)$, donc $a_0 = f(0) \neq 0$ et par suite $b_0 = \frac{1}{a_0}$.

Supposons connaitre b_0, \dots, b_{n-1} , alors de l'égalité $\sum_{k=0}^n C_n^k a_k b_{n-k} = 0$ on tire $b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n C_n^k a_k b_{n-k}$,

ce qui assure par récurrence l'existence de la suite $(b_n)_n$, d'où $\frac{1}{f} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x + iy)^n$.

Q 29. $\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$, donc

$$\Delta(uv) = \Delta(u) \cdot v + u \cdot \Delta(v) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

f étant développable en série entière, donc d'après le résultat admis $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$,

c'est à dire $\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = i \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}$, donc $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, et par suite $\Delta(uv) = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

IV.C

Q 30. h est de classe C^1 comme fonction à composantes de classe C^1 , donc, de plus $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ et

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - i \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}, \text{ or } g \text{ est harmonique, donc de classe } C^2, \text{ d'où } \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}, \text{ ce qui entraîne que } i \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y},$$

ainsi h de classe C^1 à valeurs dans \mathbb{C} et vérifie $\frac{\partial h}{\partial y} = i \frac{\partial h}{\partial x}$, ce qui assure par le résultat admis que h est développable en série entière sur $D(0, R)$.

Q 31. h étant développable en série entière sur $D(0, R)$, posons $h(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n$ et considérons

$$H(x, y) = g(0, 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x + iy)^{n+1} = u(x, y) + iv(x, y), \text{ alors } H \text{ de classe } C^1 \text{ et } \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = h(x, y) =$$

$-i \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$, donc $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$, d'où $dg = du$ et puisque $D(0, R)$ est connexe par arcs (il est même convexe),

$$\forall (x, y) \in D(0, R) \quad g(x, y) - u(x, y) = cte = g(0, 0) - u(0, 0) = 0, \text{ on conclut que } g = u = Re(H).$$

IV.D

Q 32. Soit $r \in [0, R]$, alors $\forall t \in [0, 2\pi] \quad (r \cos(t), r \sin(t)) \in D(0, R)$, donc

$$\int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \exp(int) dt.$$

Les fonctions $f_n : t \mapsto a_n r^n \exp(int)$ sont continues sur le segment $[0, 2\pi]$, de plus $|a_n r^n \exp(int)| = |a_n| r^n$ et $\sum a_n r^n$ converge absolument, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \exp(int)$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$, ce qui permet de permuter série et intégral, on obtient donc

$$\int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} \exp(int) dt = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \delta_{n,0} = 2\pi a_0 = 2\pi f(0),$$

ce qui donne l'égalité $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt$.

Q 33. Soit f harmonique sur $D(0, R)$ tel que $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, où u et v sont les parties réelles et imaginaires de f , alors u et v sont aussi harmoniques sur $D(0, R)$ à valeurs réelles, donc d'après IV.C, ils existent H, G développables en série entière sur $D(0, R)$ tel que $u = Re(H)$ et $v = Re(G)$, d'où $f(x, y) = Re(H(x, y)) + i Re(G(x, y))$ et l'égalité précédente est vérifiée pour H et G .

$$f(0) = Re(H(0)) + i Re(G(0)) = Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(r \cos(t), r \sin(t)) dt \right) + i Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(r \cos(t), r \sin(t)) dt \right) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re(H) + i Re(G)) (r \cos(t), r \sin(t)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt$$

Q 34. $t \mapsto f(r \cos(t), r \sin(t))$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, ce qui assure l'existence de $\sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(r \cos(t), r \sin(t))|$,

et de l'égalité de la question Q32, on obtient $|f(0)| \leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(r \cos(t), r \sin(t))|$, or $t \mapsto f(r \cos(t), r \sin(t))$ est

2π -périodique, donc $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(r \cos(t), r \sin(t))| = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(r \cos(t), r \sin(t))|$, d'où $f(0) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(r \cos(t), r \sin(t))|$.

Q 35. On fait une copie de la réponse précédente.

Q 36. Si $|f|$ admet un maximum en 0 sur $D(0, R)$, alors $\forall z \in D(0, 1), |f(z)| \leq |f(0)|$.

- Si $f(0) = 0$, alors $f = 0$ sur $D(0, 1)$.

- Si $f(0) \neq 0$. Supposons que les a_n du développement $f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x + iy)^n$ ne sont pas tous nuls et considérons $k \geq 1$ le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$, alors si $x + iy$ est voisin de 0, $f(x, y) = f(0) + a_k(x + iy)^k + o(|x + iy|^k)$, donc $f(x, y) = f(0) \left(1 + \frac{a_k}{f(0)}(x + iy)^k + o(|x + iy|^k) \right)$.

Choisissons $\varepsilon > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a_k}{f(0)} = r_0 e^{i\theta}$ où $r_0 > 0$, alors si $z_0 = \varepsilon e^{-i\frac{\theta}{k}}$ on aura $f(z_0) = f(0) (1 + r_0 \varepsilon^k + o(\varepsilon^k))$, donc pour ε assez petit $|f(z_0)| > |f(0)|$, ce qui contredit la maximalité de $|f(0)|$ et par suite les a_n sont nuls pour $n \geq 1$, ce qui entraîne que $\forall z \in D(0, 1)$, $f(z) = f(0)$.

Q 37. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un polynôme complexe P qui ne s'annule pas sur \mathbb{C} et non constant, alors d'après la question Q28, $\frac{1}{P}$ est développable en série entière sur \mathbb{C} , de plus $|P(re^{it})| \underset{+\infty}{\sim} |a_n| r^n$ où $n = \deg(P) \geq 1$, donc $|P(re^{it})| \underset{r \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ et par suite $\frac{1}{|P(re^{it})|} \underset{r \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, ce qui assure l'existence de $R > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > R$, on a $\frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{1}{|P(0)|}$.

$\overline{D(0, R)}$ est un compact et $z \mapsto \frac{1}{|P(z)|}$ est continue, donc $\exists z_0 \in \overline{D(0, R)}$ $\frac{1}{|P(z_0)|} \leq \frac{1}{|P(z)|}$, en particulier $\frac{1}{|P(0)|} \leq \frac{1}{|P(z_0)|}$, on conclut que $\forall z \in \mathbb{C}$ $\frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{1}{|P(z_0)|}$ et par suite la fonction $z \mapsto \frac{1}{|P(z + z_0)|}$ admet un maximum en 0, ce qui entraîne par la question précédente que cette fonction est constante, ce qui contredit que P n'est pas constant.

V Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de \mathbb{R}^2

Q 38. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{1 + e^{-it}z}{1 - e^{-it}z}$, or $|e^{-it}z| = |z| < 1$, donc les développements usuels assurent que la fonction $z \mapsto \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$ est développable en série entière sur $D(0, 1)$ et on a

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = (1 + e^{-it}z) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-int} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-int} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-i(n+1)t} z^{n+1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-int} z^n.$$

$$g(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right), \text{ or } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) e^{-int} dt \right) z^n,$$

donc développable en série entière sur $D(0, 1)$, et la question Q27 assure que $(x, y) \mapsto g(x + iy)$ est harmonique sur $D(0, 1)$.

Q 39. $\forall z \in D(0, 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $t \mapsto e^{-int} z^n$ sont continues sur le segment $[0, 2\pi]$ et $|e^{-int} z^n| = |z|^n$, donc la série $\sum_n e^{-int} z^n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$, ce qui permet de permuter série et intégral, on a donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} dt \right) z^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{n,0} z^n = 1, \text{ donc sa partie réelle } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t, z) dt = 1.$$

Q 40. Soit f une fonction 2π -périodique définie sur \mathbb{R} à valeurs réelles.

Montrons que $\forall \varphi \in \mathbb{R}$, $\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt$.

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$, alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[$, donc avec le changement $t \leftarrow t + 2k\pi$, on obtient $\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(t) dt = \int_{2k\pi}^{\varphi} f(t) dt + \int_{\varphi}^{2(k+1)\pi} f(t) dt$ et par le changement $t \leftarrow t + 2\pi$ dans la première intégrale, on obtient $\int_{2k\pi}^{\varphi} f(t) dt = \int_{2(k+1)\pi}^{\varphi+2\pi} f(t) dt$, ce qui donne l'égalité $\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt$.

En appliquant cette égalité à la fonction $t \mapsto h(t) \mathcal{P}(t, z)$ qui est 2π -périodique, on obtient la formule demandée.

$$\text{Q 41. Soit } r \in [0, 1[, \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} = \frac{1 + re^{i(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}} = \frac{(1 + re^{i(\theta-t)})(1 - re^{-i(\theta-t)})}{|1 - re^{i(\theta-t)}|^2} =,$$

$$\text{or } |1 - re^{i(\theta-t)}|^2 = (1 - r \cos(\theta-t))^2 + r^2 \sin^2(\theta-t) = 1 - 2r \cos(\theta-t) + r^2 \text{ et } (1 + re^{i(\theta-t)})(1 - re^{-i(\theta-t)}) = 1 - r^2 + 2ir \sin(\theta-t), \text{ donc } \mathcal{P}(t, re^{i\theta}) \text{ est la partie réelle de } \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} = \frac{1 - r^2 + 2ir \sin(\theta-t)}{1 - 2r \cos(\theta-t) + r^2} \text{ à savoir } \mathcal{P}(t, re^{i\theta}) =$$

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta-t) + r^2}.$$

$$\text{Q 42. Posons } z = re^{i\theta}, \text{ alors } 0 \leq \mathcal{P}(t, re^{i\theta}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta-t) + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{(1+r)^2}, \text{ donc } 0 \leq \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, re^{i\theta}) dt \leq$$

$2(\pi - \delta) \frac{1 - r^2}{(1 + r)^2}$, or si $z \rightarrow e^{i\varphi}$, alors $|z| \rightarrow 1$, donc $2(\pi - \delta) \frac{1 - r^2}{(1 + r)^2} \rightarrow 0$

et par suite $\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi}} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, re^{i\theta}) dt = 0$.

Q 43. Soit $\varepsilon > 0$, h étant continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc d'après le théorème de Heine, h est uniformément continue sur $[0, 2\pi]$, d'où $\exists \delta > 0$ qu'on peut choisir dans $]0, \pi[$ tel que

$\forall x, y \in [0, 2\pi]$ vérifiant $|x - y| \leq \delta$, $|h(x) - h(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$, $z \in D(0, 1)$, $|g(z) - h(\varphi)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (h(t) - h(\varphi)) \mathcal{P}(t, z) dt \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} (h(t) - h(\varphi)) \mathcal{P}(t, z) dt \right| \leq$
 $\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+\delta} |h(t) - h(\varphi)| \mathcal{P}(t, z) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t) - h(\varphi)| \mathcal{P}(t, z) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi+2\pi-\delta}^{\varphi+2\pi} |h(t) - h(\varphi)| \mathcal{P}(t, z) dt$

Par périodicité $\int_{\varphi+2\pi-\delta}^{\varphi+2\pi} |h(t) - h(\varphi)| \mathcal{P}(t, z) dt = \int_{\varphi-\delta}^{\varphi} |h(t) - h(\varphi)| \mathcal{P}(t, z) dt$ et par inégalité triangulaire

$\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t) - h(\varphi)| \mathcal{P}(t, z) dt \leq \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|}{\pi}$, donc

$|g(z) - h(\varphi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt + \varepsilon$.

Q 44. D'après la question Q42, pour le ε de la question Q43, $\exists r \in]0, 1[$ tel que

$\forall z \in D(e^{i\varphi}, r)$, $\frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt \leq \varepsilon$, donc $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow e^{i\varphi}} h(\varphi)$.

La continuité de $z \mapsto h(t) \mathcal{P}(t, z)$ sur $D(0, 1)$ entraîne la continuité de g sur $D(0, 1)$, de plus $\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi}} g(z) = h(\varphi)$,

donc g se prolonge par continuité sur $\overline{D(0, 1)}$ en une fonction qu'on notera toujours g en posant $g(e^{i\varphi}) = h(\varphi)$.

Si on pose $f(x, y) = g(x + iy)$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$ $f(\cos(t), \sin(t)) = h(t)$, de plus d'après la question Q38, f est harmonique sur $D(0, 1)$, donc f est solution du problème de Dirichlet sur $D(0, 1)$.

Pour l'unicité, supposons que le problème admet deux solutions f_1 et f_2 , alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_1(\cos(t), \sin(t)) = f_2(\cos(t), \sin(t))$, c'est à dire $f_1 = f_2$ sur $\partial D(0, 1)$, donc d'après la question Q25, $f_1 = f_2$ sur $D(0, 1)$.