ÉCOLE POLYTECHNIQUE PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Concours d'admission 2000

Première partie

1. (a) Si $u \in E_+$, alors $r(u) > 0$, et l'on peut choisir α tel que $0 < \alpha < r(u)$; la suite $\left(u_k \alpha^k\right)_{k\geq 1}$ est alors bornée: on peut considérer $\beta > 0$ tel que $\left|u_k \alpha^k\right| \leq \beta$ pour tout k; alors pour tout k, $|u_k| \leq \frac{\beta}{\alpha^k} = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}$ et le réel $M = \max\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) > 0$ convient.

   Inversement, on dispose de $M > 0$ tel que la suite de terme général $u_k\left(\frac{1}{M}\right)^k$ soit bornée, ce qui par définition de $r(u)$ implique $\frac{1}{M} \leq r(u)$, et a fortiori $r(u) > 0$.

   L'assertion est démontrée.

   (b) Si l'on avait $r(u) > \frac{1}{M}$, la suite de terme général $u_k\left(\frac{1}{M}\right)^k$ devrait tendre vers 0 (puisque la série converge); or l'hypothèse affirme que son module est minoré par 1. Donc $r(u) \leq \frac{1}{M}$. L'assertion est démontrée.

2. Calculons
$$\frac{k^2}{i^2(k-i)^2} = \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{k-i}\right)^2 = \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(k-i)^2} + \frac{2}{i(k-i)} = \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(k-i)^2} + \frac{2}{k}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{k-i}\right)$$
Par sommation, il vient
$$S_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{k^2}{i^2(k-i)^2} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i^2} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{(k-i)^2} + \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i} + \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{k-i}$$
En utilisant le changement d'indice $i' = k - i$, cela donne: $S_k = 2\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i^2} + \frac{4}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i}$.

   On en déduit par exemple $S_k \leq 2\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2} + 4\frac{k-1}{k} \leq \frac{\pi^2}{3} + 4$

   donc en prenant $\gamma = \frac{\pi^2}{3} + 4$, on a bien $\boxed{\forall k \geq 2, \quad \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i^2(k-i)^2} \leq \frac{\gamma}{k^2}}$

   Quelle est la valeur optimale? Maple suggère que c'est $\gamma = \frac{41}{9} = S_4$; vérifions-le: d'abord $S_2 = 4$, $S_3 = \frac{9}{2}$ sont inférieurs à S_4; ensuite, pour $k \geq 5$:
$$S_k - S_4 = 2\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i^2} + \frac{4}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i} - 2\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i} = 2\sum_{i=4}^{k-1}\frac{1}{i^2} + \frac{4}{k}\sum_{i=4}^{k-1}\frac{1}{i} + \left(\frac{4}{k} - 1\right)\frac{11}{6}$$

Puisque la fonction $t \to t^{-2}$ est décroissante, par comparaison à une intégrale il vient

$$S_k - S_4 \leq 2 \int_3^{k-1} \frac{dt}{t^2} + \frac{4}{k} \sum_{i=4}^{k-1} \frac{1}{4} + \frac{4-k}{k} \frac{11}{6} = -\frac{(k-4)(k-5)}{6k(k-1)} \leq 0$$

Deuxième partie

3. Distinguons deux cas:
<u>Cas $-a \notin \mathbb{N}^*$</u>. Si l'on a $0 = (k+a) u_k$ pour tout $k \geq 1$, on en déduit $u_k = 0$ pour tout $k \geq 1$, donc u est nulle, et ainsi A_a est injectif.
De plus, pour $v \in E$, il est possible de définir u par $u_k = \dfrac{1}{k+a} v_k$; c'est un élément de E tel que $A_a u = v$, et ainsi A_a est surjectif.
<u>Cas $-a \in \mathbb{N}^*$</u>. Si l'on a $0 = (k+a) u_k$ pour tout $k \geq 1$, en en déduit $u_k = 0$ pour tout $k \neq -a$, donc $u \in \mathbb{C}e_{-a}$; inversement, $A_a e_{-a}$ est la suite nulle, donc $\ker A_a = \mathbb{C}e_{-a}$.
Si $v = A_a u$, nécessairement $v_{-a} = 0$; inversement, si $v_{-a} = 0$, on peut poser $u_k = \dfrac{1}{k+a} v_k$ si $k \neq -a$ et $u_{-a} = 0$; cela définit un élément de E tel que $A_a u = v$. L'image de A_a est donc l'hyperplan noyau de la forme linéaire non nulle $\phi : u \in E \to u_{-a} \in \mathbb{C}$.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } -a \notin \mathbb{N}^*, & \ker A_a = \{0\} \text{ et } \operatorname{Im} A_a = E \\ \text{si } -a \in \mathbb{N}^*, & \ker A_a = \mathbb{C}e_{-a} \text{ et } \operatorname{Im} A_a = \ker (u \in E \to u_{-a} \in \mathbb{C}) \end{array}}$$

Notons que dans les deux cas $\ker A_a \bigoplus \operatorname{Im} A_a = E$, puisque $\phi(e_{-a}) = 1 \neq 0$.

4. On peut noter préalablement que si l'on pose $v_k = (k+a) u_k$, alors lorsque $k \to +\infty$

$$|v_k| \sim k |u_k|$$

donc $r(v)$ est aussi le rayon de la série $\sum\limits_{k \geq 1} k u_k x^{k-1}$, qui vaut $r(u)$ puisqu'une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence. Notamment, $u \in E_R$ si et seulement si $A_a u \in E_R$, ceci pour tout $R > 0$.
D'après la question précédente, puisque $-a \notin \mathbb{N}^*$, A_a est injective, donc sa restriction à E_R l'est a fortiori; la remarque précédente montre que si $u \in E_R$, alors $A_a u \in E_R$, et si l'on choisit $v \in E_R$, on peut considérer $u = A_a^{-1} v \in E$, avec $u \in E_R$ pour les mêmes raisons. Ainsi,

<u>Si $-a \notin \mathbb{N}^*$, A_a induit un isomorphisme de E_R.</u>

Troisième partie

5. (a) Traduisons que $Tu = v$: $v_1 = (1+a) u_1$ et $v_k = (k+a) u_k + c \sum\limits_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i}$ pour $k \geq 2$ ce qui permet d'en tirer

$$\boxed{u_1 = \frac{v_1}{1+a}, \quad u_k = \frac{1}{k+a} \left[v_k - c \sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i} \right] \text{ pour } k \geq 2.}$$

(b) Si $Tu = Tu' = v$, le calcul précédent montre que u et u' s'expriment de la même manière en fonction de v, donc $u = u'$ (i.e. $u_k = u'_k$ pour tout $k \geq 1$ par récurrence). L'application T est donc injective.
Elle est aussi surjective, car si $v \in E$, il est loisible de définir par récurrence la suite u par les relations obtenues à la question précédente ($k + a \neq 0$ pour tout $k \geq 1$), et cette suite u vérifie clairement $Tu = v$. $\underline{T \text{ est une bijection de } E \text{ dans } E.}$

6. (a) Soit $u \in E_+$. D'après le cours, $r(Tu) \geq \min(r(A_a u), r(u * u))$; or $r(u * u) \geq r(u)$ (puisque plus généralement $r(u * v) \geq \min(r(u), r(v))$, et d'après la question 4., $A_a u \in E_{r(u)}$, donc $r(Tu) \geq r(u) > 0$, et ainsi $Tu \in E_+$:

$$\underline{T(E_+) \text{ est inclus dans } E_+.}$$

(b) Si pour tout $\delta > 0$, il existait $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $|k + a| < \delta$, on pourrait considérer une suite d'entiers non nuls k_n vérifiant $|k_n + a| \leq 2^{-n}$, et dont $-a$ serait ainsi la limite; une suite d'entiers convergente étant stationnaire, cela imposerait $-a \in \mathbb{N}^*$; donc comme a n'est pas un entier strictement négatif, l'existence de δ est assurée.
Si $c = 0$, tout $M_0 > 0$ convient, sinon il suffit de prendre $M_0 = \dfrac{\delta}{2|c|\gamma} > 0$.
Puisque $v \in E_+$, la question 1. (a) garantit l'existence de $M > 0$ tel que $|v_k| \leq M^k$ pour tout k.
Il reste alors à choisir $M_1 > 0$ tel que $2k^2 M^k \leq \delta M_0 M_1^k$ pour tout $k \geq 1$; pour $k = 1$, cela impliquera $M \leq 2M \leq \delta M_0 M_1$. Or

$$2k^2 M^k \leq \delta M_0 M_1^k \Leftrightarrow \frac{1}{k} \ln \frac{2}{\delta M_0} + 2\frac{\ln k}{k} + \ln M \leq \ln M_1$$

et la suite $k \to \dfrac{1}{k} \ln \dfrac{2}{\delta M_0} + 2\dfrac{\ln k}{k} + \ln M$ converge vers $\ln M$, donc est majorée par une constante M'; le choix de $M_1 = \exp\left(M'\right)$ fait l'affaire.

$$\underline{\text{L'existence des 4 réels strictement positifs est établie.}}$$

(c) Montrons par récurrence que $\boxed{\forall k \geq 1, \quad |u_k| \leq \dfrac{M_0 M_1^k}{k^2}.}$
Pour $k = 1$: $|u_1| = \dfrac{|v_1|}{|1 + a|} \leq \dfrac{M}{\delta}$ d'après (1) et (3); mais d'après (4), $M \leq \delta M_0 M_1$, donc $|u_1| \leq M_0 M_1 = \dfrac{M_0 M_1^1}{1^2}$.
Supposons le résultat acquis jusqu'à l'ordre $k - 1$; alors grâce à 5. (a) et (1) :

$$|u_k| \leq \frac{1}{|k + a|} \left[|v_k| + |c| \sum_{i=1}^{k-1} |u_i| \, |u_{k-i}| \right] \leq \frac{1}{\delta} \left(|v_k| + |c| \sum_{i=1}^{k-1} |u_i| \, |u_{k-i}| \right);$$

par hypothèse de récurrence et grâce à (3) :

$$|u_k| \leq \frac{1}{\delta} \left(M^k + |c| \sum_{i=1}^{k-1} \frac{M_0 M_1^i M_0 M_1^{k-i}}{i^2 (k - i)^2} \right) = \frac{1}{\delta} \left(M^k + |c| \, M_0^2 M_1^k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2 (k - i)^2} \right)$$

En utilisant la question 2. et la condition (2) :

$$|u_k| \leq \frac{1}{\delta}\left(M^k + |c|\, M_0^2 M_1^k \frac{\gamma}{k^2}\right) \leq \frac{1}{2\delta}\left(2M^k + \frac{\delta M_0 M_1^k}{k^2}\right) = \frac{M^k}{\delta} + \frac{M_0 M_1^k}{2k^2}$$

Il reste à utiliser la condition (5) pour obtenir $|u_k| \leq \dfrac{M_0 M_1^k}{2k^2} + \dfrac{M_0 M_1^k}{2k^2} = \dfrac{M_0 M_1^k}{k^2}$.

(d) L'application T étant injective, sa restriction à E_+ l'est également, et est à valeurs dans E_+.
Si $v \in E^+$, la surjectivité de T assure l'existence de $u \in E$ tel que $v = Tu$, ce qui nous ramène aux hypothèses de 6. Il s'agit alors de prouver que $u \in E^+$. Puisque $\dfrac{1}{k^2} \leq 1$, en posant $M_2 = \max(M_0 M_1, M_1)$, on a donc $|u_k| \leq (M_0 M_1)\, M_1^{k-1} \leq M_2^k$ avec $M_2 > 0$. D'après 1. (a), on a bien $u \in E_+$. $\underline{T \text{ est une bijection de } E_+ \text{ sur } E_+.}$

7. (a) Posons $\alpha_k = \dfrac{u_k}{\lambda^k}$; d'après 5. (a), $\alpha_1 = \dfrac{v_1}{(1+a)\,\lambda} = 1$ et pour $k \geq 2$

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda^k}\frac{1}{k+a}\left(v_k - c\sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i}\right) = \frac{1}{\lambda^k}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{u_i}{\lambda^i}\frac{u_{k-i}}{\lambda^{k-i}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\alpha_{k-i}.$$

On constate que α_1 vérifie les conditions requises. Supposons que cela soit le cas pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ avec $k \geq 2$; alors

$$\frac{k}{2^{k-1}}\frac{2\,(k-1)}{k} = \frac{k-1}{2^{k-2}} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2^{i-1}2^{k-i-1}} \leq k\alpha_k \leq \sum_{i=1}^{k-1} 1 = k-1 \leq k$$

Comme $2\,(k-1) \geq k$, on en déduit $k2^{1-k} \leq k\alpha_k \leq k$ et finalement

$$\boxed{u_k = \alpha_k\lambda^k \text{ avec } 2^{1-k} \leq \alpha_k \leq 1 \text{ pour tout } k \geq 1.}$$

(b) Puisque pour tout k, $|u_k| \leq \lambda^k$, il vient d'après 1. (a) : $r\,(u) \geq \dfrac{1}{\lambda}$. Puisque pour tout k, $|u_k| \geq \dfrac{\lambda^k}{2^{k-1}} \geq \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^k$, il vient d'après 1. (b) : $r\,(u) \leq \dfrac{2}{\lambda}$. $\boxed{\dfrac{1}{\lambda} \leq r\,(u) \leq \dfrac{2}{\lambda}.}$

Quatrième partie

8. L'équation $ty' + at = 0$ relève du cours sur les équations différentielles linéaires; si l'on travaille sur $I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0, +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction continue $t \mapsto t$ ne s'annule pas, les solutions maximales sont définies sur I tout entier, et forment une droite vectorielle engendrée par la fonction $t \mapsto \exp(-a \ln|t|) = |t|^{-a}$.

les solutions maximales sont définies sur tout l'intervalle proposé,
et sont proportionnelles à $t \mapsto |t|^{-a}$.

9. Supposons que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ soit solution de $Df = 0$ et vérifie $f(0) = 0$. Elle est en particulier solution sur les deux intervalles précédents, et il existe donc α, β deux réels tels que $f(t) = \alpha |t|^{-a}$ pour $t > 0$ et $f(t) = \beta |t|^{-a}$ pour $t < 0$. Le seul moyen qu'une telle solution soit non nulle et indéfiniment dérivable est que $-a \in \mathbb{N}^*$.
   Cette condition nécessaire est suffisante, car si $a = -n \in \mathbb{N}^*$, $f(t) = t^n$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de classe C^{∞}, nulle en 0 non identiquement nulle.

   $$\underline{\text{La condition est que } a \text{ soit un entier strictement négatif.}}$$

10. L'équation $Df = g$ équivaut sur I à $\forall t \in I$, $f'(t)\, t^a + a t^{a-1} f(t) = t^{a-1} g(t) = (t^a f(t))'$ donc sur l'intervalle I :
   $$\left\{ \begin{array}{c} Df = g \\ f(t_0) = \alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow t^a f(t) - \alpha t_0^a = \int_{t_0}^{t} s^{a-1} g(s)\, ds$$
   et la solution cherchée est
   $$\boxed{f(t) = \alpha t_0^a \times t^{-a} + t^{-a} \int_{t_0}^{t} s^{a-1} g(s)\, ds.}$$

11. Puisque $g(0) = 0$, toute solution de $Df = g$ doit vérifier $f(0) = \lim_{t \to 0} \left(t f'(t) + a f(t) \right) = g(0) = 0$. Il s'agit donc de chercher une solution $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k t^k$ avec $r(u) \geq \theta$. Or pour une telle série entière, de classe C^{∞} sur $]-r(u), r(u)[$ et dérivable terme à terme, on a sur $]-r(u), r(u)[$:
   $$t f'(t) + a f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k + a)\, u_k t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (A_a u)_k\, t^k.$$
   Puisque a n'est pas un entier strictement négatif, et que $v \in E_R$ avec $R = \theta > 0$, d'après la question 4., il existe un unique élément $u \in E_R$ tel que $A_a u = v$. Cet élément u est tel que $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k t^k$ vérifie $Df = g$ et $r(u) \geq \theta$. Il reste à réaliser la condition $f(t_0) = \alpha$, ce qui compte-tenu de la question 5. (a) (avec $c = 0$) s'écrit:
   $$\boxed{\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k}{k + a} t_0^k.}$$

12. (a) Soit $\varepsilon > 0$; puisque $a < 0$ et $\lim_{t \to 0} g(t) = 0$, il existe $t_1 > 0$ (que l'on peut supposer $< t_0$) tel que $0 < t < t_1$ implique $|g(t)| \leq (-a)\,\varepsilon$, donc également $|g(t)\, t^{a-1}| = \left| \frac{d}{dt} [f(t)\, t^a] \right| \leq -a\varepsilon t^{a-1}$. Alors pour $0 < t < t_1$:
   $$|f(t)\, t^a - f(t_1)\, t_1^a| \leq \int_t^{t_1} \left| g(s)\, s^{a-1} \right| ds \leq -a\varepsilon \int_t^{t_1} s^{a-1} ds = \varepsilon t^a - \varepsilon t_1^a \leq \varepsilon t^a$$

puis $\left|f(t) - f(t_1)\dfrac{t_1^a}{t^a}\right| \le \varepsilon$; mais $\lim\limits_{t\to 0} f(t_1)\dfrac{t_1^a}{t^a} = 0$ donc on peut trouver $t_2 > 0$ tel que $\left|f(t_1)\dfrac{t_1^a}{t^a}\right| \le \varepsilon$ pour $0 < t < t_2$; alors pour $0 < t < \min(t_1, t_2)$, $|f(t)| \le 2\varepsilon$ par inégalité triangulaire. Ceci établit

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = 0.}$$

(b) L'hypothèse sur g donne $\dfrac{g(s)}{s^{1-a}} = o\left(\dfrac{1}{s^{1-a}}\right)$ et comme $1-a < 1$, on en déduit l'intégrabilité en 0 de cette fonction; ainsi

$$\lim_{t\to 0}\left(\alpha t_0^a + \int_{t_0}^{t} \frac{g(s)}{s^{1-a}} ds\right) = \alpha t_0^a - \int_0^{t_0} \frac{g(s)}{s^{1-a}} ds.$$

Pour que

$$f(t) = \frac{1}{t^a}\left(\alpha t_0^a + \int_{t_0}^{t} \frac{g(s)}{s^{1-a}} ds\right)$$

admette une limite finie en 0^+, il est nécessaire de prendre

$$\boxed{\alpha = t_0^{-a} \int_0^{t_0} \frac{g(s)}{s^{1-a}} ds.}$$

Dans ce cas, grâce au changement C^1 bijectif: $u \in]0,1] \to s = tu \in]0,t]$:

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{1}{t^a}\int_0^t \frac{g(s)}{s^{1-a}} ds = \int_0^1 \frac{g(tu)}{u^{1-a}} du$$

Après prolongement en 0, la fonction g est continue sur le compact $\left[0, \dfrac{\theta}{2}\right] = K$, donc bornée, et l'on peut considérer M tel que $|g(t)| \le M$ pour $t \in K$; alors $\left|\dfrac{g(ut)}{u^{1-a}}\right| \le \dfrac{M}{u^{1-a}}$ pour tout $(t,u) \in K \times]0,1]$, ce qui réalise la condition de domination (l'intégrabilité étant assurée par changement de variable); comme $t \to \dfrac{g(ut)}{u^{1-a}}$ est continue sur K, pour tout $u \in]0,1]$, le théorème de continuité sous le signe $\int$ établit que

$$\lim_{t\to 0} \int_0^1 \frac{g(tu)}{u^{1-a}} du = \int_0^1 \frac{g(0)}{u^{1-a}} du = 0$$

et donc

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = 0.}$$