Centrale TSI 2003 - Mathématiques 1

Partie I

I.A.1. f_α est continue sur $]0,+\infty[$. Comme $\alpha<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ et $f_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
D'où $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty}$.
On en déduit simplement que <u>l'intégrale de f_α sur $\mathbb{R}^+$ diverge</u> ($\lim\limits_{x\to+\infty} x^0 f_\alpha(x) = +\infty$).

I.A.2. Pour $\alpha = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq 1+\sin^2 x \leq 2$. D'où $\dfrac{x}{2} \leq f_0(x)$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty$ et

<u>l'intégrale de f_0 sur $\mathbb{R}^+$ diverge</u>.

I.A.3. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 + x^\alpha \sin^2 x \leq 1 + x^\alpha$. D'où :

$$\boxed{f_\alpha(x) \geq \frac{x}{1+x^\alpha}}$$

Posons, pour $\alpha \in]0,2]$, $g_\alpha : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{x}{1+x^\alpha} \end{array}$. g_α est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $g_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$.
Or $\alpha - 1 \leq 1$, donc l'intégrale de g_α sur $\mathbb{R}^+$ diverge et comme $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq g_\alpha(x) \leq f_\alpha(x)$,

<u>l'intégrale de f_α sur $\mathbb{R}^+$ diverge</u>.

I.B.1. Pour $\alpha > 0$, f_α est continue sur $\mathbb{R}^+$ et positive. Notons U_n la somme partielle de rang n de $\sum\limits_{n\geq1} u_n$.

• Supposons l'intégrale de f_α convergente. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f_\alpha(u)du = l \in \mathbb{R}$. Or :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\left(k-\frac12\right)\pi}^{\left(k+\frac12\right)\pi} f_\alpha(u)du \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\left(n+\frac12\right)\pi} f_\alpha(u)du \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(u)du$. D'où $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ converge.

• Supposons que $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ converge et posons $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = L$.

On a alors $\forall x \in \left[\dfrac{\pi}{2},+\infty\right[$, $\exists n \in \mathbb{N}^*, x \leq \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$. D'où :

$0 \leq \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f_\alpha(u)du \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\left(n+\frac12\right)\pi} f_\alpha(u)du = U_n \leq L$ puisque $f_\alpha \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq 0$.

Comme $f_\alpha \geq 0$ et $\left\{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f_\alpha(u)du \Big/ x \in \left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[\right\}$ est majoré, l'intégrale de f_α sur $\left[\dfrac{\pi}{2},+\infty\right[$, donc sur $\mathbb{R}^+$, converge.

J'ai montré que :

$$\boxed{\text{l'intégrale de } f_\alpha \text{ est convergente } \Leftrightarrow \sum_{n\geq1} u_n \text{ converge}}$$

I.B.2. En minorant le numérateur de $f_\alpha(x)$ sur $\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi, \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$ par $\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$ et en majorant son dénominateur par $1+\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^\alpha \sin^2(x)$ (α est positif), on obtient $u_n \geq v_n$.

De même, en majorant le numérateur de $f_\alpha(x)$ sur $\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi, \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$ par $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ et en minorant son dénominateur par $1+\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^\alpha \sin^2(x)$, on obtient $u_n \leq w_n$. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq u_n \leq w_n}$$

I.B.3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, notons h_α l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\dfrac{1}{1+\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^\alpha \sin^2(x)}$.

h_α est alors π-périodique. D'où, $w_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h_\alpha(u)du$. Comme h_α est paire :

$$\boxed{w_n = (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^\alpha \sin^2(u)}du}$$

De même :

$$\boxed{v_n = (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^\alpha \sin^2(u)}du}$$

I.B.4. Effectuons dans l'intégrale le changement de variables $t=\tan(u)$.
$\left(\tan \text{ est un difféomorphisme de classe } C^1 \text{ de } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ sur } \mathbb{R}^+\right)$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+h^2\sin^2(u)}du &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+h^2\frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(1+h^2)\,t^2}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\left[\arctan\left(\sqrt{1+h^2}t\right)\right]_0^{+\infty}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+h^2\sin^2(u)}du = \frac{\pi}{2\sqrt{1+h^2}}}$$

On en déduit, en utilisant $h = \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{\alpha/2}$, que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{(2n-1)\,\pi^2}{2\sqrt{1+\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^\alpha}}}$$

et de même :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_n=\frac{(2n+1)\,\pi^2}{2\sqrt{1+\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^\alpha}}}$$

I.B.5. On a alors, comme $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\geq 1$ et $\alpha>0$, $v_n\geq\dfrac{(2n-1)\,\pi^2}{2\sqrt{2\left((n+1)\,\pi\right)^\alpha}}$ et comme $2n-1-\dfrac{1}{2}(n+1)=\dfrac{3}{2}(n-1)\geq 0$,

$v_n\geq\dfrac{(n+1)\,\pi^2}{4\sqrt{2}\sqrt{\left((n+1)\,\pi\right)^\alpha}}$ et donc :

$$\boxed{v_n\geq\frac{K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}\text{ avec }K=\frac{1}{4\sqrt{2}}>0}$$

On a aussi $\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $w_n\leq\dfrac{(2n+1)\,\pi^2}{2\sqrt{\left((n-1)\,\pi\right)^\alpha}}$ et comme $(2n+1)-5(n-1)=-3n+6\leq 0$,

$w_n\leq\dfrac{5(n-1)\,\pi^2}{2\sqrt{\left((n-1)\,\pi\right)^\alpha}}$ et donc :

$$\boxed{w_n\leq\frac{K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}\text{ avec }K=\frac{5}{2}>0}$$

I.B.6. Posons $v'_n=\dfrac{K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ et $w'_n=\dfrac{K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$.

$v'_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ et $\sum\limits_{n\geq 1}v'_n$ converge $\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{2}-1>1\Leftrightarrow\alpha>4$. Donc si $\alpha\leq 4$, comme $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq v'_n\leq v_n\leq u_n,\ \sum\limits_{n\geq 1}u_n$ diverge et l'intégrale de f_α diverge.

$w'_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ et $\sum\limits_{n\geq 1}w'_n$ converge $\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{2}-1>1\Leftrightarrow\alpha>4$. Donc si $\alpha>4$, comme $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq u_n\leq w_n\leq w'_n,\ \sum\limits_{n\geq 1}u_n$ converge et l'intégrale de f_α diverge. On a montré que :

$$\boxed{\text{l'intégrale de } f_\alpha \text{ converge si et seulement si } \alpha>4.}$$

I.C.1. $\forall\alpha\in\,]4,+\infty[\,,\ \Phi(\alpha)=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{x}{1+x^\alpha\sin^2 x}dx$. On a alors, pour x fixé dans $\left[\dfrac{\pi}{2},+\infty\right[\subset\,]1,+\infty[\,,\ \begin{array}{l}]4,+\infty[\,\to\mathbb{R}\\ \alpha\to x^\alpha\end{array}$ est strictement croissante et $\begin{array}{l}]4,+\infty[\,\to\mathbb{R}\\ \alpha\to\dfrac{x}{1+x^\alpha\sin^2 x}\end{array}$ est strictement décroissante. On en déduit que :

$$\boxed{\Phi\text{ est décroissante sur }]4,+\infty[.}$$

I.C.2. L'on a vu que $\forall\alpha\in\,]4,+\infty[\,,\ \Phi(\alpha)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$. Or $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq v'_n\leq v_n\leq u_n$. D'où, $0\leq\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v'_n\leq\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=\Phi(\alpha)$.

$$\text{D'où } \forall \alpha \in]4,+\infty[, \quad \Phi(\alpha) \begin{aligned}[t] &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \\ &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x^{\frac{\alpha}{2}-1}} \\ &= K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{\alpha}{2}-1}} \\ &= K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2-\frac{\alpha}{2}} \left[x^{2-\frac{\alpha}{2}} \right]_2^{+\infty} \\ &= K\frac{(2\pi)^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}-2} \underset{\alpha\to 4}{\sim} \frac{2K}{(\alpha-4)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 4^+} \Phi(\alpha) = +\infty}$$

I.C.3. L'on a vu que $\forall \alpha \in]4,+\infty[,\ \Phi(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq w_n \leq w'_n$. D'où, $\sum_{n\geq 1} v'_n$ converge et $0 \leq \Phi(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} w'_n$.

$$\text{D'où } \forall \alpha \in]4,+\infty[, \ \Phi(\alpha) \begin{aligned}[t] &\leq u_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \\ &\leq 2\int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{1+x^\alpha \sin^2 x} + \sum_{n=2}^{+\infty} K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^{\frac{\alpha}{2}-1}} \\ &= u_1 + K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{\alpha}{2}-1}} \\ &= u_1 + K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2-\frac{\alpha}{2}} \left[x^{2-\frac{\alpha}{2}} \right]_1^{+\infty} \\ &= u_1 + K' \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}-2}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{\alpha\to+\infty} K'\dfrac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}-2} = 0$ et $0 \leq u_1 \leq w_1 = \dfrac{3\pi^2}{2\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha}}$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} w_1 = 0$.

D'où :

$$\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty} \Phi(\alpha) = 0}$$

Partie II

II.A. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(x) > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \dfrac{(n+1)^x}{n^x(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ de limite 0 en $+\infty$. Donc :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n(x) \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

II.B. $\forall x \in \mathbb{R},\ (S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Comme $S_1(x) = u_1(x) = 1$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} S_n(x) > 0}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'application $x \to \dfrac{n^x}{n!}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc :

$$\boxed{S \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

II.C.

$$\boxed{S(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e-1}$$

$$\boxed{S(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e}$$

$$\boxed{S(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n-1)+n}{n!}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}+S(1)=2e}$$

$$\begin{aligned}
S(3) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{n!}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}+3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}\\
&= \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n-3)!}+3\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}+S(1)\\
&= 5e.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{S(3)=5e}$$

II.D. On a déjà vu $\forall x\in\mathbb{R},\ S(x)>0$.
Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $k>n$.
$\forall x\in\mathbb{R}^{-*},\ u_k(x)=\dfrac{k^x}{k!}=\left(\dfrac{k}{n}\right)^x\times\dfrac{n^x}{n!}\times\dfrac{n!}{k!}$. Or :

– $\left(\dfrac{k}{n}\right)^x\leq 1$ car $\dfrac{k}{n}>1$ et $x<0$

– $\dfrac{n!}{k!}=\dfrac{1}{k\ldots(n+1)}\leq\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{k-n}$

D'où $u_k(x)\leq\dfrac{n^x}{n!}\times\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{k-n}$ (terme général d'une série géométrique convergente) et

$$\begin{aligned}
S(x) &\leq S_{n-1}(x)+u_n(x)+\frac{n^x}{n!}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k-n}\\
&= S_{n-1}(x)+\frac{n^x}{n!}+\frac{n^x}{n!}\times\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}}\\
&\leq S_{n-1}(x)+\frac{n^x}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

J'ai montré :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{-*},\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ 0<S(x)\leq S_{n-1}(x)+\frac{n^x}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

II.E. L'on a $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ 0<S(-1)\leq S_{n-1}(-1)+\dfrac{n^{-1}}{n!}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Calculons un majorant de $\dfrac{n^{-1}}{n!}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ pour les différentes valeurs successives de $n\geq 2$:

n	2	3	4	5
$\dfrac{n^{-1}}{n!}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$	$0,4$	$0,08$	$0,02$	$0,003$

Donc $0 < S_4(-1) < S(-1) < S_4(-1) + 0,003 = \displaystyle\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n \times n!} + 0,003 \Rightarrow$
$1,3159 < S(-1) < 1,3160 + 0,003.$
Donc, une valeur approchée à 10^{-2} près par excès de $S(-1)$ est $1,32$.

II.F. $\forall x \in \mathbb{R}^{-*},\ 0 < S_1(x) < S(x) < S_1(x) + \dfrac{2^x}{2!}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$. Or $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x}{2!}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 0$. D'où :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} S(x) = S_1(x) = 1}$$

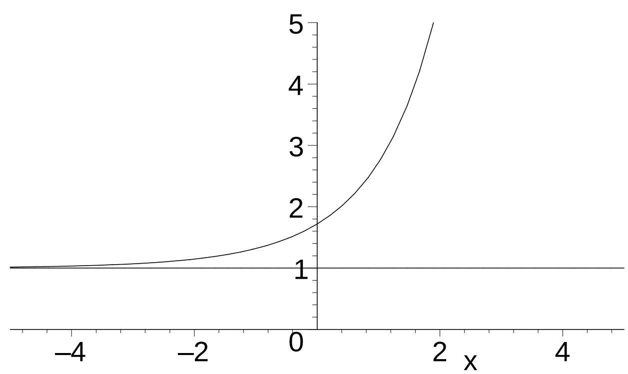
$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ S(x) > S_2(x) = 1 + \dfrac{2^x}{2!}$. Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{2!} = +\infty$. D'où :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} S(x) = +\infty}$$

II.G. En $-\infty$, la représentation graphique de S admet l'asymptote d'équation $y = 1$.

En $+\infty$, comme, pour $x > 0$, $\dfrac{S(x)}{x} > \dfrac{2^x}{2!x}$ de limite $+\infty$, la branche infinie est une branche parabolique de direction asymptotique d'équation $x = 0$.

D'où l'allure de la représentation :



II.H. Soit $p \in \mathbb{N}^*,\ x \in]0,1]$; appliquons la formule de Taylor-Lagrange à exp sur $[0,x]$ en 0 à l'ordre $p-1$ (exp est C^∞ sur $[0,x]$).

$\exists c \in]0,x[,\ e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k}{k!} + e^c \frac{x^p}{p!}$.

Or $1 \le e^c \le e$; d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} \le e^x \le \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k}{k!} + e\frac{x^p}{p!}$ ce qui est encore vrai pour $x = 0$. Donc :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} \le e^x \le \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k}{k!} + e\frac{x^p}{p!}}$$

II.I. $t \xrightarrow{\varphi} \dfrac{e^t - 1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} 1$ et φ se prolonge par continuité en 0 ; d'où :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt \text{ converge.}}$$

II.J. De II.H., on déduit que $\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \forall t \in]0,1]$,

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{t^{k-1}}{k!}\leq\frac{e^t-1}{t}\leq\sum_{k=1}^{p-1}\frac{t^{k-1}}{k!}+e\frac{t^{p-1}}{p!}\Rightarrow$$
$$\sum_{k=1}^{p}\int_0^1\frac{t^{k-1}}{k!}\leq\int_0^1\frac{e^t-1}{t}dt\leq\sum_{k=1}^{p-1}\int_0^1\frac{t^{k-1}}{k!}+e\int_0^1\frac{t^{p-1}}{p!}\Rightarrow$$
$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k.k!}\leq\int_0^1\frac{e^t-1}{t}dt\leq\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k.k!}+e\frac{1}{p.p!}\Rightarrow$$
$$S_p\left(-1\right)\leq\int_0^1\frac{e^t-1}{t}dt\leq S_{p-1}(-1)+e\frac{1}{p.p!}.$$
En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient :

$$\boxed{\int_0^1\frac{e^t-1}{t}dt=S(-1)}$$

$\Delta\Delta\Delta$

Rédigé par
Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal 22000 St Brieuc
Tel. 0296639414
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr