

CORRIGÉ : MATH 1 ; MP ; X_2010

Préliminaires

1.a) Soient α et β deux formes linéaires sur \mathbb{R}^n telles que : $\ker(\beta) \subset \ker(\alpha)$.

(i) Si $\alpha = 0$ alors $\alpha = 0 \cdot \beta$

(ii) Si $\alpha \neq 0$ alors $\ker(\alpha)$ est un hyperplan de \mathbb{R}^n . Alors aussi $\beta \neq 0$ et $\ker(\beta) = \ker(\alpha)$.

Soit $z \in \mathbb{R}^n \setminus \ker(\beta)$; $\mathbb{R}^n = \ker(\beta) \oplus \mathbb{R}z$. Soient $\lambda = \frac{\alpha(z)}{\beta(z)}$ et $x = y + \mu z \in \mathbb{R}^n$ avec $y \in \ker(\beta)$.

$\alpha(x) = \mu\alpha(z) = \lambda\mu\beta(z) = \lambda\beta(x)$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$; $\alpha(x) = \lambda\beta(x)$. D'où $\alpha = \lambda\beta$.

1.b) Soient $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_r$ des formes linéaires sur \mathbb{R}^n telles que $\bigcap_{i=1}^r \ker(\beta_i) \subset \ker(\alpha)$.

On va montrer par récurrence sur r que α est combinaison linéaire de β_1, \dots, β_r .

Le cas $r = 1$ est déjà fait à la question précédente. Soit $r \geq 2$.

Supposons alors que pour toutes formes linéaires $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}$ de \mathbb{R}^n , α est combinaison

linéaire de $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$, dès que $\bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i) \subset \ker(\alpha)$.

Soient maintenant $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_r$ des formes linéaires sur \mathbb{R}^n telles que $\bigcap_{i=1}^r \ker(\beta_i) \subset \ker(\alpha)$.

Premier cas :

Si $\bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i) = \{0\}$ alors $\bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i) \subset \ker(\alpha)$. L'hypothèse de récurrence permet de conclure que α est combinaison linéaire de $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$ et donc de β_1, \dots, β_r .

Deuxième cas :

Si $\bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i) \neq \{0\}$, on note α' et β'_r les restrictions respectives à $F = \bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i)$ de α et β_r .

α' et β'_r sont des formes linéaires sur F et $\ker(\beta'_r) = \bigcap_{i=1}^r \ker(\beta_i) \subset \ker(\alpha') = \ker(\alpha) \cap \bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i)$.

alors d'après 1.a), il existe un réel λ_r tel que : $\alpha' = \lambda_r \beta'_r$.

$\alpha - \lambda_r \beta_r$ est nul sur $F = \bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i)$, c'est à dire : $\bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i) \subset \ker(\alpha - \lambda_r \beta_r)$.

Alors d'après l'hypothèse de récurrence, $\alpha - \lambda_r \beta_r$ est combinaison linéaire de $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$.

On déduit alors que α est combinaison linéaire de β_1, \dots, β_r .

Première partie

2) Soit $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que : $\forall t \in]-1, 1[; \|\gamma(t)\| = 1$.
 $\forall t \in]-1, 1[; \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$.

En dérivant cette expression, on obtient : $\forall t \in]-1, 1[; 2 \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et soit $v \in \mathbb{R}^n$, non nul, orthogonal à x .

On pose : $\forall t \in]-1, 1[; \gamma(t) = \cos(\|v\|t)x + \sin(\|v\|t)\frac{v}{\|v\|}$. γ répond bien à la question.

4) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , et soit g sa restriction à S^{n-1} .

f est continue sur \mathbb{R}^n , alors g est continue sur le compact S^{n-1} , donc g est bornée sur S^{n-1} et y atteint ses bornes. Soit $x \in S^{n-1}$ un extremum de g .

Soit v un élément non nul de \mathbb{R}^n orthogonal à x .

D'après la question précédente, il existe une application $\gamma :]-1, 1[\rightarrow S^{n-1}$ de classe C^1 telle que : $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

$g \circ \gamma$ est de classe C^1 sur $] - 1, 1[$ et admet 0 comme extremum. Alors :

$$(g \circ \gamma)'(0) = 0 = (f \circ \gamma)'(0) = df_x(v)$$

Soit la forme linéaire $[\varphi : h \mapsto \langle x, h \rangle]$; $\ker(\varphi) \subset \ker(df_x)$.

D'où d'après 1) il existe un réel λ tel que : $df_x = \lambda\varphi$, c'est à dire : $\forall h \in \mathbb{R}^n ; df_x(h) = \lambda \langle x, h \rangle$.

5) Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$, et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n ; f(x) = \langle x, Ax \rangle.$$

5.a) On sait que tout endomorphisme de \mathbb{R}^n est de classe C^1 sur \mathbb{R}^n , f est le produit scalaire de deux endomorphismes de \mathbb{R}^n , alors f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^n .

Fixons $x \in \mathbb{R}^n$, et soit h quelconque dans \mathbb{R}^n .

$$f(x+h) = f(x) + \langle h, Ax \rangle + \langle x, Ah \rangle + \langle h, Ah \rangle = f(x) + 2 \langle Ax, h \rangle + \langle h, Ah \rangle.$$

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\| \cdot \|$ subordonnée à la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

$$|\langle h, Ah \rangle| \leq \|A\| \cdot \|h\|^2 = o(\|h\|).$$

$[h \mapsto 2 \langle Ax, h \rangle]$ définit une forme linéaire sur \mathbb{R}^n , c'est donc la différentielle df_x .

5.b) Soit x un extremum de la restriction de f à S^{n-1} .

D'après la question précédente, il existe un réel λ tel que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n ; df_x(h) = \lambda \langle x, h \rangle = 2 \langle Ax, h \rangle.$$

$$\forall h \in \mathbb{R}^n ; \langle 2Ax - \lambda x, h \rangle = 0. \quad Ax = \frac{\lambda}{2}x.$$

Deuxième partie

Dans cette partie on considère les fonctions suivantes : $q, f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

définies par : $\forall M \in M_n(\mathbb{R}) ; q(M) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij}^2 ; f(M) = \det(M) - 1$.

On note aussi g la restriction de q à $SL_n(\mathbb{R})$.

$$6.a) \text{ Posons } {}^tMM = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}. \quad \delta_{jj} = \sum_{1 \leq i \leq n} m_{ij}^2 \text{ et } Tr({}^tMM) = \sum_{1 \leq j \leq n} \delta_{jj} = \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq i \leq n} m_{ij}^2 = q(M).$$

6.b) C'est clair que $\Phi(A, B) = Tr({}^tAB)$ définit une forme bilinéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

$$\Phi(A, B) = Tr({}^tAB) = Tr({}^t(AB)) = Tr({}^tBA) = \Phi(B, A).$$

$$\Phi(A, A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 \geq 0 \text{ et } [\Phi(A, A) = 0 \Rightarrow \forall i, j ; a_{ij} = 0 \Rightarrow A = 0]$$

Finalement : $\Phi(A, B) = Tr({}^tAB)$ définit alors un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

6.c) On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa base canonique, alors q est une fonction polynômiale sur $M_n(\mathbb{R})$, d'où q est de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$.

Fixons $M \in M_n(\mathbb{R})$, et soit H quelconque dans $M_n(\mathbb{R})$.

$$q(M+H) = Tr({}^t(M+H)(M+H)) = q(M) + Tr({}^tMH) + Tr({}^tHM) + Tr({}^tHH).$$

$$q(M+H) = q(M) + 2Tr({}^tMH) + Tr({}^tHH).$$

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne associée au produit scalaire de la question précédente. $|Tr({}^tHH)| = \|H\|^2 = o(\|H\|)$.

$[H \mapsto 2Tr({}^tMH)]$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$, c'est donc la différentielle dq_M .

7) Soient $M \in M_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. Posons : $M' = M + tE_{ij} = (m'_{h,k})_{1 \leq h, k \leq n}$.

On pose : $\tilde{M} = (c_{h,k})_{1 \leq h, k \leq n}$. Développons le déterminant de M' suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne :

$$\det(M') = \sum_{1 \leq k \leq n} m'_{i,k} c_{ik} = \sum_{1 \leq k \leq n} m_{i,k} c_{ik} + t c_{ij} = \det(M) + t c_{ij}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(M) = c_{ij}. \text{ et } \forall M, H \in M_n(\mathbb{R}) ; df_M(H) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(M) h_{ij} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{ij} h_{ij} = Tr({}^t\tilde{M}H).$$

8) $SL_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$, car f est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.

g est positive donc minorée sur $SL_n(\mathbb{R})$, soit $\mu = \inf_{M \in SL_n(\mathbb{R})} g(M)$.

Il existe une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $SL_n(\mathbb{R})$, telle que : $\lim_{k \rightarrow \infty} g(M_k) = \mu$.

$g(M_k) = \|M_k\|^2$, alors la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée, et on est en dimension finie, alors d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite $(M_{n_q})_{q \in \mathbb{N}}$ convergente vers un élément M de $SL_n(\mathbb{R})$, puisque $SL_n(\mathbb{R})$ est fermé.

M est alors un minimum de g . (car g est continue $\mu = \lim_{q \rightarrow \infty} g(M_{n_q}) = g(M)$)

9) Soit $M \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$.

M est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$, Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure

telles que : $M = PTP^{-1}$. $\forall h \in \mathbb{N}$; $M^h = PT^hP^{-1}$ et $\sum_{0 \leq k \leq h} \frac{M^k}{k!} = P \left(\sum_{0 \leq k \leq h} \frac{T^k}{k!} \right) P^{-1}$.

L'application $[X \mapsto PXP^{-1}]$ est linéaire en dimension finie, donc continue.

On fait tendre h vers l'infini dans l'expression précédente, on obtient alors :

$\exp(M) = P(\exp(T))P^{-1}$. Rappelons que deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant. $Tr(M) = Tr(T)$ et $\det(\exp(M)) = \det(\exp(T))$.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de T , alors $\sum_{0 \leq k \leq h} \frac{T^k}{k!}$ est triangulaire supérieure et

ses éléments diagonaux sont : $\sum_{0 \leq k \leq h} \frac{\lambda_1^k}{k!} ; \dots ; \sum_{0 \leq k \leq h} \frac{\lambda_n^k}{k!}$. On fait tendre h vers l'infini.

Alors $\exp(T)$ est triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux sont : $\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n)$.

$\det(\exp(T)) = \prod_{1 \leq i \leq n} \exp(\lambda_i) = \exp(\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i) = \exp(Tr(T))$. ou encore $\det(\exp(M)) = \exp(Tr(M))$.

10) Soient $M \in SL_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$ tels que : $df_M(H) = 0$.

Soit $\gamma :] - 1, 1[\rightarrow M_n(\mathbb{R})$ l'application définie par : $\forall t \in] - 1, 1[; \gamma(t) = M \exp(tM^{-1}H)$.

$\det(\gamma(t)) = \det(M) \exp(Tr(tM^{-1}H))$ et $Tr(tM^{-1}H) = Tr(t\tilde{M}H) = df_M(tH) = tdf_M(H) = 0$.

$\det(\gamma(t)) = \det(M) = 1$. γ est à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$.

D'après le préambule de ce problème : $[t \mapsto \exp(tM^{-1}H)]$ est C^1 sur $] - 1, 1[$.

L'application $[X \mapsto MX]$ est linéaire donc de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$.

γ est composée de deux applications de classe C^1 , alors γ est de classe C^1 sur $] - 1, 1[$.

$\gamma(0) = M$ et d'après le préambule : $\gamma'(0) = M\psi'(0) = MM^{-1}H = H$.

11) Soient $M \in SL_n(\mathbb{R})$ un point où la fonction g atteint son minimum, et H dans $M_n(\mathbb{R})$ tels que : $df_M(H) = 0$.

11.a) Soit γ de la question précédente.

$q \circ \gamma$ est de classe C^1 sur $] - 1, 1[$ et admet 0 comme minimum.

alors $(q \circ \gamma)'(0) = 0 = dq_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = dq_M(H)$.

11.b) D'après la question précédente :

$\ker(df_M) \subset \ker(dq_M)$, alors d'après 1) il existe un réel λ tel que $dq_M = \lambda df_M$.

$\forall H \in M_n(\mathbb{R}) ; df_M(H) = Tr({}^t\tilde{M}H)$ et $dq_M(H) = 2Tr({}^tMH)$.

$\forall H \in M_n(\mathbb{R}) ; Tr((2 {}^tM - \lambda {}^t\tilde{M})H) = 0$.

$2M - \lambda \tilde{M}$ est orthogonal à $M_n(\mathbb{R})$, alors $M = \frac{\lambda}{2} \tilde{M} = \frac{\lambda}{2} {}^tM^{-1}$.

$M \cdot {}^tM = \frac{\lambda}{2} I_n$ et $\det(M \cdot {}^tM) = 1 = (\frac{\lambda}{2})^n \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = \pm 1$.

$Tr(M \cdot {}^tM) = q(M) = n \frac{\lambda}{2} \geq 0$ alors $\frac{\lambda}{2} = 1$ et $M \cdot {}^tM = I_n$. M est alors une matrice orthogonale.

$g(M) = q(M) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij}^2$ est la somme des carrés des normes des colonnes de M .

Alors $g(M) = n$.

Troisième Partie

12.a) Soient $C_1, C_2 : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ deux applications de classe C^1 . On pose : $B(t) = C_1(t)C_2(t)$. L'application $C_0 : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ définie par : $C_0(t) = (C_1(t), C_2(t))$ est de classe C^1 . L'application : $\Pi : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par : $\Pi(A, B) = AB$ est bilinéaire en dimension finie, donc de classe C^1 de différentielle définie par : $d\Pi_{(A,B)}(H) = HB + AH$.

$B = \Pi \circ C_0$ est alors de classe C^1 et pour tout réel t :

$$B'(t) = d\Pi_{C_0(t)}(C_0'(t)) = C_1'(t)C_2(t) + C_1(t)C_2'(t).$$

12.b) Soit $C : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application de classe C^1 .

On suppose que C est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ et on pose : $\forall t \in \mathbb{R} ; D(t) = C(t)^{-1}$.

Rappelons que l'application : $X \mapsto X^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Aussi, l'application $(X, Y, Z) \mapsto XYZ$ est trilinéaire en dimension finie, donc continue sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$.

Fixons un réel t , pour tout réel non nul h , $\frac{D(t+h)-D(t)}{h} = \frac{C(t+h)^{-1}-C(t)^{-1}}{h} = C(t+h)^{-1} \frac{C(t)-C(t+h)}{h} C(t)^{-1}$

En utilisant la continuité de l'application i et la dérivabilité de l'application C , on déduit :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(t+h)-D(t)}{h} = -C(t)^{-1} C'(t) C(t)^{-1}.$$

D est alors dérivable sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R} ; D'(t) = -C(t)^{-1} C'(t) C(t)^{-1}$.

En utilisant la continuité de $i \circ C$, C' , et de θ , on déduit celle de D' .

Finalement : D est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R} ; D'(t) = -C(t)^{-1} C'(t) C(t)^{-1}$.

13) Soient $C_1, C_2 : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ des applications de classe C^2 telles que : $C_1(0) = C_2(0) = I_n$.

13.a) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose : $\forall t \in \mathbb{R} : A(t) = \exp(t(\alpha C_1'(0) + \beta C_2'(0)))$.

A est de classe C^1 sur \mathbb{R} , $A(0) = I_n$ et $A'(0) = \alpha C_1'(0) + \beta C_2'(0)$.

13.b) L'application $\left[t \mapsto \det(C_1(t)C_2(t)) \right]$ est continue de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

$\delta(0) = 1 > 0$, alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall t \in] -\varepsilon, \varepsilon[; \delta(t) = \det(C_1(t)) \det(C_2(t)) > 0.$$

D'où, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall t \in] -\varepsilon, \varepsilon[; C_1(t)$ et $C_2(t)$ sont inversibles.

13.c) Pour tous s, t dans $] -\varepsilon, \varepsilon[$, posons : $L(s, t) = C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}$.

D'après les questions 12.a) et 12.b) L est de classe C^1 sur $] -\varepsilon, \varepsilon[\times] -\varepsilon, \varepsilon[$ et on a :

$$\frac{\partial L}{\partial t}(s, t) = C_1(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1} - C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2'(t)C_2(t)^{-1}.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(s, t) = C_1'(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1} - C_1(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_1'(s)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}$$

$$- C_1'(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}C_2'(t)C_2(t)^{-1} + C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_1'(s)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}C_2'(t)C_2(t)^{-1}.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(0, 0) = C_1'(0)C_2'(0) - C_2'(0)C_1'(0) - C_1'(0)C_2'(0) + C_1'(0)C_2'(0) = C_1'(0)C_2'(0) - C_2'(0)C_1'(0).$$

14) Soit $\Phi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL(M_n(\mathbb{R}))$ l'application définie par :

$$\forall X \in GL_n(\mathbb{R}) ; \forall Y \in M_n(\mathbb{R}) ; \Phi(X)(Y) = XYX^{-1}.$$

14.a) $\forall X, X' \in GL_n(\mathbb{R}) ; \forall Y \in M_n(\mathbb{R}) ; \Phi(XX')(Y) = XX'YX'^{-1}X^{-1} = \Phi(X) \circ \Phi(X')(Y)$.

$\forall X, X' \in GL_n(\mathbb{R}) ; \Phi(XX') = \Phi(X) \circ \Phi(X')$ alors Φ est un morphisme de groupes.

$X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} \tilde{X}$, ses coefficients sont des fractions rationnelles aux coefficients de X .

Les coefficients de XYX^{-1} sont alors des fractions rationnelles aux coefficients de X et de Y .

On munit alors $M_n(\mathbb{R})$ de sa base canonique et $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$ de sa base canonique correspondante à la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

Les coordonnées de Φ dans cette base sont des fractions rationnelles aux coefficients de X .

D'où Φ est de classe C^1 .

14.b) Pour $H \in M_n(\mathbb{R}) ; \|H\|$ suffisamment petit et $Y \in M_n(\mathbb{R}) :$

$$\Phi(I_n + H)(Y) = (I_n + H)Y(I_n + H)^{-1} = \Phi(I_n)(Y) + (I_n + H)Y(I_n + H)^{-1} - Y$$

$$(\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n))(Y) = (I_n + H)Y(I_n + H)^{-1} - Y = ((I_n + H)Y - Y(I_n + H))(I_n + H)^{-1}$$

$$(\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n))(Y) = (HY - YH) + (HY - YH)((I_n + H)^{-1} - I_n).$$

L'application $[A \mapsto A^{-1}]$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$, alors $\lim_{H \rightarrow 0} ((I_n + H)^{-1} - I_n) = 0$.

Notons Ψ_H l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall Y \in M_n(\mathbb{R}) ; \Psi_H(Y) = HY - YH$.
 Ψ est linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$

On muni $M_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n , et on muni $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$ de la norme subordonnée à cette norme.

$$\|\Psi_H(Y)\| = \|HY - YH\| \leq 2\|H\|\|Y\| \Rightarrow \|\Psi_H\| \leq 2\|H\|.$$

$$\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n) = \Psi_H + o(\|H\|).$$

Finalement : $\Psi_H = d\Phi_{I_n}(H)$, c'est à dire : $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R}) ; d\Phi_{I_n}(X)(Y) = XY - YX$.

Dans la suite du problème on pose : $\varphi(X) = d\Phi_{I_n}(X)$.

15) Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et soit $f : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL(V)$ un morphisme de groupes de classe C^1 .

15.a) $f(X + H) - f(X) = df_X(H) + \|H\|v(H)$ avec $\lim_{H \rightarrow 0} v(H) = 0$.

$$f(X)(f(I_n + X^{-1}H) - f(I_n)) = df_X(H) + \|H\|v(H) = f(X)(df_{I_n}(X^{-1}H) + \|X^{-1}H\|w(H))$$

avec $\lim_{H \rightarrow 0} w(H) = 0$.

On a aussi : $\|X^{-1}H\| \leq \|X^{-1}\|\|H\|$ et l'application $[H \mapsto f(X)df_{I_n}(X^{-1}H)]$ est linéaire.

$$\text{Alors : } f(X + H) - f(X) = df_X(H) + o(\|H\|) = f(X)df_{I_n}(X^{-1}H) + o(\|H\|).$$

D'où par unicité de la différentielle de f en X on a :

$$\forall X \in GL_n(\mathbb{R}) ; \forall H \in M_n(\mathbb{R}) ; df_X(H) = f(X)df_{I_n}(X^{-1}H).$$

On refait le même travail, mais cette fois ci en écrivant :

$$f(X + H) - f(X) = (f(I_n + HX^{-1}) - f(I_n))f(X)$$

On obtient alors : $\forall X \in GL_n(\mathbb{R}) ; \forall H \in M_n(\mathbb{R}) ; df_X(H) = df_{I_n}(HX^{-1})f(X)$.

15.b) On fixe $X \in M_n(\mathbb{R})$ et on considère les applications $a, b : \mathbb{R} \rightarrow GL(V)$ définies pour tout réel t par : $a(t) = f(\exp(tX))$ et $b(t) = \exp(tdf_{I_n}(X))$

a et b sont de classe C^1 sur \mathbb{R} , $a(0) = b(0) = I_n$.

$$\forall t \in \mathbb{R} ; b'(t) = df_{I_n}(X) \exp(tdf_{I_n}(X)) \text{ et } a'(t) = df_{\exp(tX)}(X \exp(tX)) = df_{I_n}(X) f(\exp(tX)).$$

Alors a et b sont solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $y' = df_{I_n}(X)y$.

Alors $a = b$ d'après le théorème d'unicité de Cauchy.

15.c) $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^* \simeq GL(\mathbb{R})$ est un morphisme de groupes.

On va appliquer la question précédente pour $f = \det$. Soit $X \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\forall t \in \mathbb{R} ; \det(\exp(tX)) = \exp(tdf_{I_n}(X)).$$

D'après 7) $df_{I_n}(X) = \text{Tr}(\widetilde{I_n X})$ or $\det(I_n) = 1$ et $I_n^{-1} = I_n$ alors $\widetilde{I_n} = I_n$ et $df_{I_n}(X) = \text{Tr}(X)$.

Pour $t = 1$, On retrouve alors le résultat de la question 9) $\det(\exp(X)) = \exp(\text{Tr}(X))$.

15.d) On utilise le résultat de la question 15.b) pour $V = M_n(\mathbb{R})$ et $f = \Phi$.

$\forall t \in \mathbb{R} ; \Phi(\exp(tX)) = \exp(t\varphi(X))$, pour $t = 1$ on trouve le résultat cherché.

16) On fixe $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u(s, t) = \exp(s(X + tY)) \text{ et } A(s, t) = \exp(-sX) \frac{\partial u}{\partial t}(s, t).$$

$$16.a) \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) = d\exp_{s(X+tY)}(sY) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(1, 0) = d\exp_X(Y) \text{ et } A(1, 0) = \exp(-X)d\exp_X(Y).$$

16.b) Commençons par montrer que u est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

$$u(s, t) = \exp(s(X + tY)) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h (X+tY)^h}{h!}.$$

Cette série est somme d'applications de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , elle ainsi que les séries obtenues à partir des dérivations $\frac{\partial}{\partial t}$; $\frac{\partial}{\partial s}$; $\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}$; $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}$; $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$; $\frac{\partial^2}{\partial s^2}$; convergent tous normalement sur tout compact de \mathbb{R}^2 .

On déduit alors que $\frac{\partial u}{\partial t}$; $\frac{\partial u}{\partial s}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ existent et sont continue sur \mathbb{R}^2 .

L'application u est donc de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , alors d'après le théorème de Schwarz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} ((X + tY) \exp(s(X + tY)))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}(s, t) = Y \exp(s(X + tY)) + (X + tY) d \exp_{s(X+tY)}(sY)$$

$$\frac{\partial A}{\partial s}(s, t) = -X \exp(-sX) d \exp_{s(X+tY)}(sY) + \exp(-sX) Y \exp(s(X + tY)) + \exp(-sX) (X + tY) d \exp_{s(X+tY)}(sY)$$

$$\frac{\partial A}{\partial s}(s, 0) = -X \exp(-sX) d \exp_{sX}(sY) + \exp(-sX) Y \exp(sX) + \exp(-sX) X d \exp_{sX}(sY)$$

$$\frac{\partial A}{\partial s}(s, 0) = \exp(-sX) Y \exp(sX) \text{ (car } X \exp(-sX) = \exp(-sX) X \text{ (écrire sous forme de série))}$$

$$\frac{\partial A}{\partial s}(s, 0) = \Phi(\exp(-sX))(Y) = \exp(-s\varphi(X))(Y) \text{ (d'après 15.b)}$$

$$16.c) \frac{\partial A}{\partial s}(s, 0) = \exp(-s\varphi(X))(Y) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h s^h \frac{\varphi(X)^h}{h!} (Y).$$

$$\text{En effet : } \left\| \exp(-s\varphi(X))(Y) - \sum_{h=0}^k (-1)^h s^h \frac{\varphi(X)^h}{h!} (Y) \right\| = \left\| \left(\sum_{h=k+1}^{\infty} (-1)^h s^h \frac{\varphi(X)^h}{h!} \right) (Y) \right\|$$

$$\left\| \exp(-s\varphi(X))(Y) - \sum_{h=0}^k (-1)^h s^h \frac{\varphi(X)^h}{h!} (Y) \right\| \leq \left\| \sum_{h=k+1}^{\infty} (-1)^h s^h \frac{\varphi(X)^h}{h!} \right\| \|Y\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

De plus cette série est une série de fonctions continues sur \mathbb{R} , qui converge normalement sur tout segment de \mathbb{R} , on peut alors intégrer terme à terme.

$$\text{Il existe une constante } Z \text{ de } M_n(\mathbb{R}) \text{ telle que : } \forall s \in \mathbb{R} ; A(s, 0) = Z + \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h s^{h+1} \frac{\varphi(X)^h}{(h+1)!} (Y).$$

$$A(0, 0) = Z = \frac{\partial u}{\partial t}(0, 0) = 0. \text{ D'où } \forall s \in \mathbb{R} ; A(s, 0) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h s^{h+1} \frac{\varphi(X)^h}{(h+1)!} (Y).$$

$$16.d) \text{ D'après 16.a) } d \exp_X(Y) = \exp(X) A(1, 0) = \exp(X) \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{\varphi(X)^h}{(h+1)!} (Y).$$

N.B :

$$\varphi(X)(Y) = XY - YX ; \varphi(X)^2(Y) = X^2Y - 2XYX + YX^2 ; \varphi(X)^3(Y) = X^3Y - 3X^2YX + 3XYX^2 - YX^3.$$

Par récurrence sur $h \in \mathbb{N}^*$, on montre facilement que :

$$\forall h \in \mathbb{N} ; \varphi(X)^h(Y) = \sum_{0 \leq j \leq h} (-1)^j C_h^j X^{h-j} Y X^j$$