<u>MATHEMATIQUES APPLIQUEES</u> M-P'

1976

x est une variable réelle : $0 < x < 1$

e est la base des logarithmes népériens. Le symbole Log désigne le logarithme népérien.

I - 1 - On considère les fonctions ψ_1 *et* ψ_2 *définies sur* $0, 1$
par $\psi_i (x) = x \operatorname{Log} x$, $\psi_2 (x) = -\frac{1}{e} - \psi_1 (x)$ *si* $x > 0$ *et*
par $\psi_1 (0) = 0$, $\psi_2 (0) = -\frac{1}{e}$.

Etudier les variations de ces deux fonctions sur $0, 1$.

Dresser, à l'aide des tables, le tableau des valeurs à la précision de 10^{-4} *de* $\psi_1 (x)$ *et de* $\psi_2 (x)$ *pour* $x = \frac{K}{10}$, *K décrivant l'ensemble* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

I - 2 - Représenter sur un même graphique les fonctions ψ_1 et ψ_2 pour $0 < x < 1$, à l'aide de l'étude précédente.
On déterminera les tangentes aux points d'arrêt.
On utilisera un repère orthonormé avec pour unité 20 cm ; on rappelle que les feuilles distribuées comportent un quadrillage 0,5 cm X 0,5 cm.

II - Pour $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$, l'on considère la relation

$$x \operatorname{Log} x + y \operatorname{Log} y = -\frac{1}{e} \qquad (R)$$

On appelle C l'ensemble des points dont les coordonnées en repère orthonormé vérifient (R).
Il admet un axe de symétrie.

II - 1 - Montrer, à partir de l'étude du I, que la relation (R) permet de définir deux fonctions implicites : $f_1 : x \to y = f_1(x)$ et $f_2 : x \to y = f_2(x)$, l'une f_1 appliquant $[0, 1]$ sur $\left[0, \frac{1}{e}\right]$, l'autre f_2 appliquant $[0, 1]$ sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ Etudier les variations de ces fonctions.

II - 2 - Caractériser les tangentes à C aux points tels que $y = x$ et aux points d'abscisses $0, \frac{1}{e}, 1$.
On admettra que $\frac{dy}{dx}$ est fonction définie et continue de x sauf en $x = 0$ et $x = 1$; pour ces derniers points on cherchera la limite de $\frac{dx}{dy}$

II - 3 - Utiliser le tableau du I - 1 - pour déterminer les points de C tels que
$\left[x = 0{,}1 \; ; \; y > \frac{1}{e}\right]$, $\left[x = 0{,}7 \; ; \; y > \frac{1}{e}\right]$, $\left[x = 0{,}9 \; ; \; y < \frac{1}{e}\right]$, $\left[x = 0{,}9 \; ; \; y > \frac{1}{e}\right]$.
On utilisera la méthode des parties proportionnelles pour la fonction $_2$ entre deux valeurs consécutives du tableau et l'on donnera 3 chiffres après la virgule.

II - 4 - La courbe C coupe la droite d'équation $y = x$ en deux points d'abscisses x_1 et x_2 $(x_1 < x_2)$.
Pour calculer x_1 on utilisera la suite récurrente définie par $u_0 = 0{,}07$ et $u_n = -\dfrac{1}{2\, e \operatorname{Log} u_{n-1}}$ (justification non demandée).

On fera les calculs à la table de logarithmes à 5 décimales et l'on prendra u_4 comme valeur approchée de x_1.

II - 5 - Pour déterminer x_2 on utilisera la courbe d'équation $y = \psi_1(x)$ que l'on remplacera par sa tangente au point d'abscisse 0,8 ; on fera le calcul à la règle.

II - 6 - Utiliser l'ensemble des résultats précédents pour tracer la courbe dans les mêmes conditions qu'à la partie I - 2 -.