

PARTIE 1

1/

(a) : une partie contenant le vecteur nul ne peut être une base

(b) : $u_1 = (3, -1)$ et $u_2 = (1, 3) \mid \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ donc cette famille libre forme une base de

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ espace vectoriel de dimension 2

(c) : $u_1 = (3, 1)$ et $u_2 = (-3, 1) \mid \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ donc cette famille libre forme une base de

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ espace vectoriel de dimension 2

(d) : $u_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et $u_2 = (-3\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}) \mid \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -3\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 0$ donc cette famille non

libre n'est pas une base de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot_{\mathbb{R}})$.

2/

On a clairement, $\forall u \in \mathbb{R}^2, g_{a,b}(u) \in \mathbb{R}^2$. Je note z' le conjugué de z (mon logiciel...!)

Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $f_{a,b}(t_1 z_1 + t_2 z_2) = a(t_1 z_1 + t_2 z_2) + b(t_1 z_1' + t_2 z_2') = t_1 f_{a,b}(z_1) + t_2 f_{a,b}(z_2)$

Cette relation se "transporte" telle quelle sur $g_{a,b}$, d'où le résultat demandé.

3/

a/ Montrons que G est un sous-espace vectoriel de $(L(\mathbb{R}^2), +, \cdot_{\mathbb{R}})$

G est non vide car l'endomorphisme nul est de la forme $g_{0,0}$.

Soient (a_1, b_1) et (a_2, b_2) de \mathbb{C}^2 et $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.

On a, pour tout z de \mathbb{C} , $(t_1 f_{a_1, b_1} + t_2 f_{a_2, b_2})(z) = t_1(a_1 z + b_1 z') + t_2(a_2 z + b_2 z')$

Donc $(t_1 f_{a_1, b_1} + t_2 f_{a_2, b_2})(z) = f_{t_1 a_1 + t_2 a_2, t_1 b_1 + t_2 b_2}(z)$

Donc $t_1 g_{a_1, b_1} + t_2 g_{a_2, b_2} = g_{t_1 a_1 + t_2 a_2, t_1 b_1 + t_2 b_2} \in G$

D'où le résultat.

b/ Nous savons que $(L(\mathbb{R}^2), +, \cdot_{\mathbb{R}})$ est un espace vectoriel de dimension 4.

Montrons que la famille proposée est libre.

Soit $(t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $t_1 g_{1,0} + t_2 g_{i,0} + t_3 g_{0,1} + t_4 g_{0,i} = 0_{L(\mathbb{R}^2)}$

Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $t_1 z + t_2 iz + t_3 z' + t_4 iz' = 0_{\mathbb{C}}$. Notons $u = t_1 + it_2$ et $v = t_3 + it_4$

Alors on a $\left\{ \begin{array}{l} uz + vz' = 0 \\ v'z + u'z' = 0 \end{array} \right\}$ en conjuguant.

On a alors $u'(uz + vz') - v(v'z + u'z') = 0$ donc $(|u|^2 - |v|^2)z = 0$ pour tout z

Donc $|u| = |v|$ donc, en notant $z = re^{ia}$, $u = |u|e^{ib}$ et $v = |u|e^{ic}$

On a, pour tout $(r, a) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $r|u|(e^{i(a+b)} + e^{i(c-a)}) = 0$

Donc, pour tout a réel, $|u|(e^{i(a+b)} + e^{i(c-a)}) = 0 = |u|(e^{i\frac{b+c}{2}} 2\cos(a + \frac{b-c}{2}))$

En prenant $a = \frac{c-b}{2}$ on obtient $|u|=0$ donc $u=v=0$ et donc les réels t_i sont tous nuls.

4/

a/

(i) : comme a est réel, $g_{a,0}$ est une homothétie

(ii) : $g_{e^{i\theta}, 0}$ est une rotation d'angle θ

(iii) : $g_{0,1}$ et la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Ox .

b/

$g_{e^{i\theta},0} \circ g_{0,1}$ est la composée de deux isométries du plan l'une directe (la rotation) l'autre indirecte (la symétrie), donc c'est une isométrie indirecte, c'est donc une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Considérons la droite vectorielle Δ faisant un angle de $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe Ox et s_Δ la symétrie orthogonale par rapport à cette droite.

Alors $g_{e^{i\theta},0} = s_\Delta \circ s_{Ox}$ et $g_{e^{i\theta},0} \circ g_{0,1} = (s_\Delta \circ s_{Ox}) \circ s_{Ox} = s_\Delta$

5/

a/ On a $s + Id = 2p$

b/ On a (4/b), $g_{a,b} = \frac{Id + g_{e^{i2a},0} \circ g_{0,1}}{2} = \frac{g_{1,0} + g_{e^{i2a},0} \circ g_{0,1}}{2}$

Donc $g_{a,b}(z) = \frac{z + e^{i2a}z'}{2}$ donc $(a,b) = (\frac{1}{2}, \frac{e^{i2a}}{2})$

6/ En posant $z = u + iv$, $a = Re(a) + iIm(a)$ et $b = Re(b) + iIm(b)$

On obtient $G_{a,b} = \begin{pmatrix} Re(a) + Re(b) & -Im(a) + Im(b) \\ Im(a) + Im(b) & Re(a) - Re(b) \end{pmatrix}$

7/ $a \in \mathbb{R}$ donc $G_{a,b} = \begin{pmatrix} Re(a) + Re(b) & Im(b) \\ Im(b) & Re(a) - Re(b) \end{pmatrix}$

Cette matrice est réelle symétrique donc diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ et, si elle a deux valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres associés sont orthogonaux. Si elle a une valeur propre double, c'est qu'elle est semblable à une matrice d'homothétie...qui n'est semblable qu'à elle-même est c'est donc que $b=0$.

8/

a/ $P_{G_{a,b}}(x) = x^2 - trace(G)x + det(G) = x^2 - 2Re(a)x + (|a|^2 - |b|^2)$

b/ Le discriminant du trinôme précédent est $\delta = 4(Re(a))^2 - 4(|a|^2 - |b|^2)$

Donc $\delta = 4(|b|^2 - (Im(a))^2) < 0$ (semble-t-il, le texte n'est pas très lisible ici)

G a alors deux valeurs propres complexes non réelles conjuguées (donc distinctes) : elle est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$ et certainement pas dans $M_2(\mathbb{R})$, ni même trigonalisable.

Si $\delta > 0$, G sera diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$

c/ Donc $\delta = 4(|b|^2 - (Im(a))^2) = 0$ dans le cas proposé.

P_G a alors une racine double réelle $Re(a)$: si elle était diagonalisable (dans $M_2(\mathbb{R})$ ou $M_2(\mathbb{C})$) elle serait semblable à une matrice d'homothétie, donc en serait déjà une d'où :

$Im(a) + Im(b) = 0 = -Im(a) + Im(b)$ donc a et b sont réels et $Re(b) = 0$

Donc $b=0$ et a réel est le seul cas de diagonalisabilité.

d/ $g_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$

et donc, en récapitulant les résultats obtenus :

Si $|b|^2 - (Im(a))^2 > 0$ ou si $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$.

PARTIE 2

1/

a/ $S \cap \{x = 0\}$ est l'hyperbole équilatère du plan yOz: $y^2 - z^2 = 1$

b/ $S \cap \{z = a\}$ est le cercle du plan horizontal de cote a, d'équation

$x^2 + y^2 = 1 + a^2$

c/ S est donc un ensemble de cercles centrés sur l'axe Oz, contenus dans des

plans horizontaux, et reconstruit l'hyperbole du a/ : il s'agit de l'hyperboloïde de révolution engendré par la rotation de l'hyperbole du a/ autour de l'axe Oz.

2/

(a) : la symétrie par rapport au plan $z=0$ envoie le point $M(x,y,z)$ sur $M'(x,y,-z)$

Clairement $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow M'(x,y,-z) \in S$, d'où le résultat. De même pour les deux autres plans.

(b) : On a $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow M'(y,x,z) \in S$ donc le plan $x=y$ est un plan de symétrie de S.

(c) : On a $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow M'(-x,y,-z) \in S$ donc la droite $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$ est un axe

de symétrie de S

3/

a/ Σ est un ensemble de cercles $C_{a,b} : \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 - a = 0 \\ z - b = 0 \end{array} \right\}$ intersections de

sphère S_a centrées en 0: $x^2 + y^2 + z^2 - a = 0$ et de plans P_b orthogonaux à l'axe: $z = b$

Ces cercles sont contenus dans Σ si et seulement si ils rencontrent Δ .

On cherche donc une condition sur (a,b) pour qu'il existe (x,y,z) de \mathbb{R}^3 tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 - a = 0 \\ z - b = 0 \\ x = 1 \\ y - z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = b \\ z = b \\ 1 + 2b^2 - a = 0 \end{array} \right\}$$

$1 + 2b^2 - a = 0$ est donc cette condition.

Alors

$$M(x,y,z) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{array}{l} M(x,y,z) \in C_{a,b} \\ 1 + 2b^2 - a = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 - a = 0 \\ z - b = 0 \\ 1 + 2b^2 - a = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Ce système équivaut à } \left\{ \begin{array}{l} a = x^2 + y^2 + z^2 \\ b = z \\ 1 + 2z^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \end{array} \right\}$$

Donc $M(x,y,z) \in \Sigma \Leftrightarrow 1 + 2z^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$ où on retrouve l'équation de S.

b/ S est donc un ensemble de droites D_θ images de Δ dans une rotation d'axe Oz et d'angle θ quelconque.

Cette rotation envoie $M(x,y,z)$ sur $M'(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$

Un point quelconque de Δ est de la forme $(1, t, t)$

donc S est le support géométrique de la nappe paramétrée :

$$(t, \theta) \mapsto M(t, \theta) : \begin{pmatrix} \cos\theta - t\sin\theta \\ \sin\theta + t\cos\theta \\ t \end{pmatrix}$$

Des génératrices sont donc les droites $D_\theta : \left(P \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, U \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

4/

a/ L'intersection de S avec un plan $z=a$ est un cercle, donc en aucun cas une droite.

b/ une droite D non horizontale rencontre le plan xOy en un point unique que l'on peut noter $A(a, b, 0)$ et admet un vecteur directeur dont la troisième coordonnée ne peut être nulle, donc, on peut choisir un vecteur colinéaire de troisième coordonnée égale à

1, d'où la représentation paramétrique proposée: $t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$

c/ $D \subset S \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (a + t\alpha)^2 + (b + t\beta)^2 - t^2 - 1 = 0$ condition notée (C)

(C) $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (\alpha^2 + \beta^2 - 1)t^2 + 2(\alpha a + \beta b)t + (a^2 + b^2 - 1) = 0$

Ce trinôme devant avoir une infinité de racines, le polynôme associé est le polynôme

nul et donc : $\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0 \\ \alpha a + \beta b = 0 \\ a^2 + b^2 - 1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$

d/ Les matrices de $O_2(\mathbb{R})$ sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}$

avec $(\varepsilon, \theta) \in \{1, -1\} \times \mathbb{R}$.

$\varepsilon = 1$ correspond aux rotations et $\varepsilon = -1$ aux symétries orthogonales par rapport à des droites vectorielles.

e/ Toutes les droites contenues dans S ont donc des droites $D_{\varepsilon, \theta}$ avec des paramétrages du type :

$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\varepsilon\sin\theta \\ \varepsilon\cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$

On retrouve ($\varepsilon = 1$) les génératrices trouvées dans le 3/b/.

PARTIE 3

1/

a/ $z(\theta) = \theta e^{i\theta}$

b/ $z'(\theta) = e^{i\theta}(1 + i\theta)$

c/ $\frac{dOM}{d\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta - \theta\sin\theta \\ \sin\theta + \theta\cos\theta \end{pmatrix}$. $\| \frac{dOM}{d\theta} \| = |z'(\theta)| = \sqrt{1 + \theta^2}$ qui n'est jamais nul donc

tous les points sont réguliers.

2/

a/ Sur D, $f'(\theta) = 2 + \tan^2\theta > 0$ donc f est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

b/ On a clairement $\theta_0 = 0$, puis $\lim_{\frac{\pi}{2}^+} f = -\infty$ et $\lim_{\frac{3\pi}{2}^-} f = +\infty$ donc f, continue

strictement monotone sur cet intervalle s'y annule exactement une fois, en θ_1 donc.

Enfin $\lim_{\frac{3\pi}{2}+f} = -\infty$ et $f(2\pi) = 2\pi > 0$, donc, pour les mêmes raisons, f s'annule exactement une fois sur cet intervalle, en θ_2 donc.

c/ Les points $M(\theta)$ à tangente horizontale sont tels que $\sin\theta + \theta\cos\theta = 0$

Comme $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ ne sont pas solutions de cette équation, celle-ci équivaut, sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, à $\theta + \tan(\theta) = 0$ dont nous venons de trouver les solutions θ_0, θ_1 et θ_2 .

Pour les points $M(\theta)$ à tangente verticale, on a, de même que précédemment, $\cotan\theta = \theta$ ou $\tan\theta = \frac{1}{\theta}$ (car $0, \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ ne sont pas solutions). Une étude graphique permet d'affirmer que $\theta_3 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\theta_4 \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$.

3/

a/ A l'aide du compas traçons le cercle de centre O et de rayon 1 . On porte $0,20$ sur l'axe Ox et, à l'aide de l'équerre, la droite perpendiculaire à Ox passant par ce point. Elle coupe le cercle en deux points. P , Celui à $y < 0$ correspond à l'angle θ_4 . Sur la droite issue de O passant par ce point, on porte $4,91$ à partir de O , ce qui donne le point $M(\theta_4)$, du même côté que P par rapport à O .

b/ Même méthode pour mettre en place les autres points. Les tangentes aux points θ_i sont déjà connues.

$$\text{Pour } M\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{dOM}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ Pour } M(\pi), \frac{dOM}{d\theta} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour } M\left(\frac{3\pi}{2}\right), \frac{dOM}{d\theta} = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ Pour } M(2\pi), \frac{dOM}{d\theta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\pi \end{pmatrix}$$

$$\text{c/ } M\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2\pi}{3} \\ -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \frac{dOM}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-2\pi}{3} \end{pmatrix},$$

4/

a/ L'aire d'un secteur de disque de rayon R et d'angle au centre α est $\frac{R^2}{2}\alpha$ d'où le résultat pour $\alpha = \frac{2k\pi}{n}$.

b/ L'aire demandée est minorée par celle de la portion de disque de rayon t_k et celle de la portion de disque de rayon t_{k+1} et les mêmes vecteurs u_k et u_{k+1} .

$$\text{Donc } \frac{\pi}{n} * \left(\frac{2k\pi}{n}\right)^2 < A_k < \frac{\pi}{n} * \left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right)^2$$

c/ La relation, classique, se montre par récurrence sur N

d/ On a clairement $A = \sum_{k=0}^n A_k$ donc,

$$\frac{4\pi^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 < A < \frac{4\pi^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 \text{ donc } \frac{4\pi^3}{n^3} \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} < A < \frac{4\pi^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Donc, pour tout } n, \frac{2\pi^3}{3n^2} (n-1)(2n-1) < A < \frac{2\pi^3}{3n^2} (n+1)(2n+1)$$

Or, quand n tend vers l'infini, les deux membres extrêmes tendent vers la même limite $\frac{4\pi^3}{3}$ donc $A = \frac{4\pi^3}{3}$.

5/ On a $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ $\frac{dM}{d\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ qui détermine une représentation paramétrique de la tangente : $t \mapsto H(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2}t \\ \frac{\pi}{2} + t \end{pmatrix}$ L'intersection avec Ox est obtenue

pour $t = -\frac{\pi}{2}$ qui donne le point $N = \left(\begin{array}{c} \frac{\pi^2}{4} \\ 0 \end{array} \right)$ La longueur demandée est donc $\frac{\pi^2}{4}$

Le périmètre du cercle de centre O passant par $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est clairement $2\pi * \frac{\pi}{2} = \pi^2$
Il faut donc que $ON_1 = 4ON$.

On prend une droite quelconque passant par O non confondue avec l'axe des abscisses. On porte une longueur p à partir de O (point K_1) et une longueur 4p (point L_1) du même côté.

On joint N et K_1 puis la parallèle à NK_1 passant par L_1 coupe Ox en N_1 cherché (sur mon dessin, hors de la feuille !)

6/

a/ On trace la droite AB et une droite D passant par A, non confondue avec la droite AB. Sur D, on porte les deux longueurs 1 (point K) et $\frac{1}{3}$, (point L) du même côté par rapport à A. On joint B et K et on trace la parallèle à BK passant par L : elle coupe la droite AB en un point C tel que $AC = \frac{AB}{3}$, d'après le théorème de Thalès.

b/ On construit le point P proposé à l'aide de la question précédente. Alors la distance $OM\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{3}OM\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ donc le point cherché est sur un cercle de rayon OP, qui coupe la courbe Γ au point cherché.

