Concours commun polytechnique TSI 2001 - Mathématiques 1
$\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta$

Préliminaires

1. $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et f est C^1 par morceaux. Donc, la série de Fourier de f a un sens et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_F(f,x)$ (série de Fourier de f en x) converge vers $f(x)$, ou encore :
f est développable en série de Fourier.

Comme f est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$.

$a_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\alpha x \; dx = \dfrac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\alpha x.\cos nx\; dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\cos\left(n+\alpha\right)x + \cos\left(n-\alpha\right)x\right]\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n+\alpha\right)x}{n+\alpha} + \frac{\sin\left(n-\alpha\right)x}{n-\alpha}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\left(-1\right)^n \sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{n+\alpha}+\frac{1}{n-\alpha}\right) \\ &= \frac{2\left(-1\right)^{n+1}\alpha\sin\alpha\pi}{\pi\left(n^2-\alpha^2\right)}.\ \text{D'où :}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\left(-1\right)^{n+1}\alpha\sin\alpha\pi}{\pi\left(n^2-\alpha^2\right)}\cos(nx)}$$

2. On en déduit que :

$f(\pi) = \cos\alpha\pi = \dfrac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\left(-1\right)^{n+1}\alpha\sin\alpha\pi}{\pi\left(n^2-\alpha^2\right)}\cos(n\pi) \Rightarrow$

$\cot\left(\alpha\pi\right) = \dfrac{1}{\alpha\pi} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\pi\left(n^2-\alpha^2\right)} \Rightarrow$ ($\sin(\alpha\pi)$ étant non nul car α n'est pas entier)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha}\cot\left(\alpha\pi\right)}$$

I. L'opérateur de différence Δ

1. $\forall n \geq 1$, $\left[\Delta(H)\right]_n = H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1}$. D'où :

$$\boxed{\Delta(H) = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n>1}}$$

2.a. Il est clair que, pour toute élément de E, $\Delta(H)$ est une suite réelle, donc appartient à E.
D'autre part, $\forall u, v \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\left[\Delta\left(\alpha u + \beta v\right)\right]_n &= \left(\alpha u + \beta v\right)_{n+1} - \left(\alpha u + \beta v\right)_n \\ &= \alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1} - \alpha u_n - \beta v_n \ \text{(définition des opérations de } E\text{)} \\ &= \alpha\Delta\left(u\right)_n + \beta\Delta\left(v\right)_n \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta\left(\alpha u + \beta v\right) = \alpha\Delta\left(u\right) + \beta\Delta\left(v\right)}$$

et

$$\boxed{\Delta \in \mathcal{L}(E)}$$

b. $\forall U \in E$,

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\left(U\right) = u \\ U_1 = a\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}U_1 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1} - U_n = u_n\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_1 = a \\ U_2 = a + u_1 \\ ... \\ \forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}, \ U_n = a + u_1 + ... + u_{n-1} \end{array} \right. \qquad \text{(récurrence simple)}$$

La flèche directe montre qu'il n'existe qu'au plus un $U \in E$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} \Delta(U) = u \\ U_1 = a \end{array} \right\}$ et la flèche réciproque montre l'existence de cette suite U.

Donc, il existe une unique suite réelle U telle que $\left\{ \begin{array}{l} \Delta(U) = u \\ U_1 = a \end{array} \right\}$. Cette suite est la suite U définie par :
$\underline{U_1 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}, \ U_n = a + u_1 + ... + u_{n-1}}$.

c. D'après la question précédente, pour toute suite $u \in E$, $\exists U \in E$ telle que $\Delta(U) = u$ et $U_1 = 0$. Donc Δ est surjective et

$$\boxed{\mathrm{Im}(\Delta) = E}$$

En outre $\forall U \in E, \ \Delta(U) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \ U_{n+1} - U_n = 0$
$\Leftrightarrow U$ est constante.
D'où

$$\boxed{\ker(\Delta) = Vect\left((1)_{n \geq 1}\right)}$$

Si E était de dimension finie, Δ étant surjective, serait injective, ce qui n'est pas le cas.
Donc, $\underline{E \text{ n'est pas de dimension finie.}}$

3. $\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \ q > p \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{q-1} [\Delta(u)]_k v_k &= \sum_{k=p}^{q-1} (u_{k+1} - u_k) v_k \\ &= \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1} v_k - \sum_{k=p}^{q-1} u_k v_k \\ &= \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1} v_k - \sum_{k=p-1}^{q-2} u_{k+1} v_{k+1} \\ &= -\sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1}(v_{k+1} - v_k) + u_q v_q - u_p v_p. \text{ D'où :} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=p}^{q-1} [\Delta(u)]_k v_k = -\sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1} [\Delta(v)]_k + u_q v_q - u_p v_p}$$

4. $\forall n \geq 2, \ \sum_{k=1}^{n-1} H_k = \sum_{k=1}^{n-1} H_k \times 1$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n-1} H_k \times \Delta\left((k)_{k \geq 1}\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) [\Delta(H)]_k + nH_n - H_1. \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \frac{1}{k+1} + nH_n - 1. \\ &= nH_n - n. \text{ D'où :} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geq 2, \ \sum_{k=1}^{n-1} H_k = n(H_n - 1)}$$

II. Les fonctions Γ et Ψ d'Euler

1. $\forall x > 0, \ t \overset{\theta_x}{\to} e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En $+\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\theta_x(t)=0$ (l'exponentielle "l'emporte" sur la puissance) et $\int_1^{+\infty}\theta_x(t)dt$ converge.

En 0^+, $\theta_x(t)\underset{0^+}{\sim}\dfrac{1}{t^{1-x}}$. Comme $1-x<1$, $\int_0^1\theta_x(t)dt$ converge. D'où :

$$\underline{\forall x>0,\ \Gamma(x)\text{ existe.}}$$

En outre, Si $\Gamma(x)$ était nul, comme θ_x est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, l'on aurait $\theta_x=0$, ce qui n'est pas le cas.
Donc :

$$\underline{\forall x>0,\ \Gamma(x)>0.}$$

2. $\forall x>0$, $\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^xdt$ (qu'on intègre par parties en posant $u'=e^{-t}$ et $v=t^x$)
$=\left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}xe^{-t}t^{x-1}dt$ (ce qui a un sens car $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t}t^x=0$ et $\lim\limits_{t\to0^+}e^{-t}t^x=0$)
Donc :

$$\boxed{\forall x>0,\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}$$

Or $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$.
Supposons $\Gamma(n)=(n-1)!$ (hypothèse de récurrence vérifiée au rang 1)
$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!$
Donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!}$$

3.a. Soit $t\in[1,+\infty[$, alors $\begin{array}{l}\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}\\ x\to t^{x-1}=e^{(x-1)\ln(t)}\end{array}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ ($\ln(t)\geq0$).
D'où $\forall x\in[a,b]$, $t^{a-1}\leq t^{x-1}\leq t^{b-1}$
De même, si $t\in]0,1]$, alors $\begin{array}{l}\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}\\ x\to t^{x-1}=e^{(x-1)\ln(t)}\end{array}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ ($\ln(t)\leq0$).
et $\forall x\in[a,b]$, $t^{b-1}\leq t^{x-1}\leq t^{a-1}$. Dans tous les cas :

$$\boxed{0\leq t^{x-1}\leq\max\left(t^{a-1},t^{b-1}\right)}$$

b. Soit $h:\ \begin{array}{l}[a,b]\times\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}\\ (x,t)\to e^{-t}t^{x-1}\end{array}$.
Alors :
- h est C^∞ sur $[a,b]\times\mathbb{R}^{+*}$ comme composée de fonctions C^∞ sur leur ensemble de définition
- $\forall(x,t)\in[a,b]\times\mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)=\ln(t)h(x,t)$ et $\dfrac{\partial^2h}{\partial x^2}(x,t)=\ln^2(t)h(x,t)$
- $\forall(x,t)\in[a,b]\times\mathbb{R}^{+*}$, $|h(x,t)|\leq e^{-t}\max(t^{a-1},t^{b-1})=\varphi_0(t)$
$\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leq|\ln(t)|\varphi_0(t)=\varphi_1(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2h}{\partial x^2}(x,t)\right|\leq\ln^2(t)\varphi_0(t)=\varphi_2(t)$
- φ_0, φ_1, φ_2 sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall k\in\{0,1,2\}$, $\int_0^{+\infty}\varphi_k(t)dt$ converge car $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\varphi_k(t)=0$ (l'exponentielle l'emporte sur la puissance et le logarithme) et si $\alpha\in]1-a,1[$, $\lim\limits_{t\to0^+}t^\alpha\varphi_k(t)=0$ ($t^\alpha\varphi_k(t)\sim t^{\alpha+x-1}|\ln(t)|^k$ avec $x+\alpha-1>a-(1-\alpha)>0$)
D'où Γ est C^2 sur $[a,b]$ après le théorème de Leibniz. a et b pouvant être choisis quelconques :

$$\boxed{\Gamma\text{ est }C^2\text{ sur }\mathbb{R}^{+*},\ \forall x>0,\ \Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}\ln(t)\,e^{-t}t^{x-1}dt,\ \Gamma''(x)=\int_0^{+\infty}\ln^2(t)\,e^{-t}t^{x-1}dt}$$

4. $\forall x>0$, $\ln(\Gamma(x+1))=\ln(x\Gamma(x))$ (d'après II.2.). D'où :

$$\boxed{\forall x>0,\ \ln\left(\Gamma\left(x+1\right)\right)-\ln(\Gamma\left(x\right))=\ln(x)}$$

L'on a évidemment :

$$\boxed{[\ln(\Gamma)]'=\frac{\Gamma'}{\Gamma}=\Psi}$$

et en dérivant $\ln\left(\Gamma\left(x+1\right)\right)-\ln(\Gamma\left(x\right))$, l'on obtient :

$$\boxed{\forall x>0,\ \Psi\left(x+1\right)-\Psi(x)=\frac{1}{x}}$$

On a alors :
$\Delta\left(\left(\Psi\left(n+\alpha\right)\right)_{n\geq 1}\right)=\left(\Psi\left(n+\alpha+1\right)-\Psi\left(n+\alpha\right)\right)_{n\geq 1}$. D'où :

$$\boxed{\Delta\left(\left(\Psi\left(n+\alpha\right)\right)_{n\geq 1}\right)=\left(\frac{1}{n+\alpha}\right)_{n\geq 1}}$$

et de même :

$$\boxed{\Delta\left(\left(\Psi\left(n-\alpha\right)\right)_{n\geq 1}\right)=\left(\frac{1}{n-\alpha}\right)_{n\geq 1}}$$

III. Formule des compléments

1. $\begin{array}{l} \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R} \\ \theta\to\tan^{2x-1}(\theta)\end{array}$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. En outre :

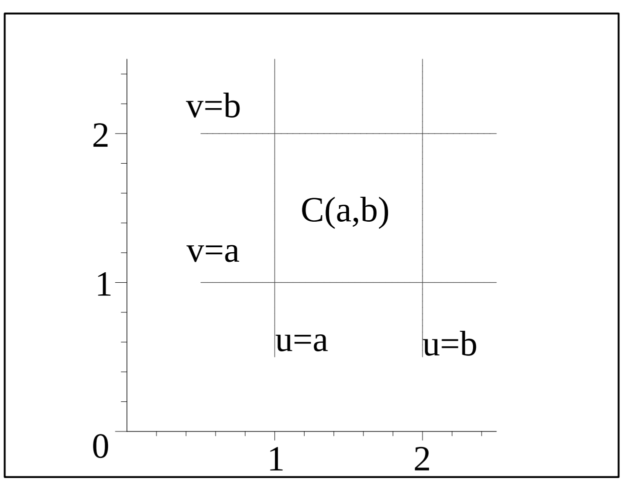
- en 0, $\tan^{2x-1}(\theta)\sim\frac{1}{\theta^{1-2x}}$ et $x>0\Rightarrow 1-2x<1$. D'où $\int_0^{\pi/4}\tan^{2x-1}(\theta)d\theta$ converge.

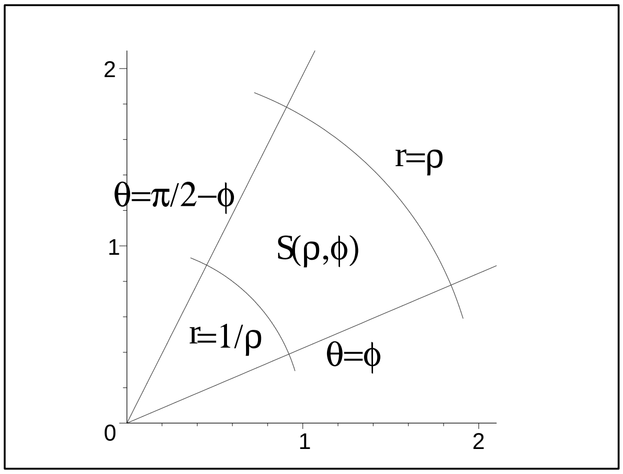
- en $\frac{\pi}{2}$, $\tan^{2x-1}(\theta)=\frac{1}{\tan^{2x-1}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\sim\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^{2x-1}}$ et $x<1\Rightarrow 2x-1<1$. D'où $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\tan^{2x-1}(\theta)d\theta$ converge.

Donc :

$$\boxed{\forall x\in\left]0,1\right[,\ I(x)=\int_0^{\pi/2}\tan^{2x-1}(\theta)d\theta\text{ converge.}}$$

2.





3. Posons $u = r\cos(\theta)$ et $v = r\sin(\theta)$. Alors :
$S(\varrho,\varphi) = \left\{(r\cos(\theta), r\sin(\theta))/r \in \left[\frac{1}{\varrho},\varrho\right] \text{ et } \theta \in \left[\varphi, \frac{\pi}{2}-\varphi\right]\right\}$. D'où :
$G(\varrho,\varphi) = \int\int_{\left[\frac{1}{\varrho},\varrho\right]\times\left[\varphi,\frac{\pi}{2}-\varphi\right]} \tan^{2x-1}\theta e^{-r^2} r dr$

$= \int_{1/\varrho}^{\varrho} e^{-r^2} r dr \times \int_{\varphi}^{\pi/2-\varphi} \tan^{2x-1}\theta\, d\theta$

$= \left[\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_{1/\varrho}^{\varrho} \times \int_{\varphi}^{\pi/2-\varphi} \tan^{2x-1}\theta\, d\theta$

D'où $\lim_{\varphi\to 0} G(\varrho,\varphi) = \frac{e^{-1/\varrho^2} - e^{-\varrho^2}}{2} \times \int_0^{\pi/2} \tan^{2x-1}\theta\, d\theta$, puisque $I(x)$ converge, et :

$$\boxed{\lim_{\varrho\to+\infty}\left(\lim_{\varphi\to 0} G(\varrho,\varphi)\right) = \frac{1}{2} \times \int_0^{\pi/2} \tan^{2x-1}(\theta) d\theta = \frac{I(x)}{2}}$$

4. $F\left(\frac{1}{\varrho\sqrt{2}}, \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\right) = \int\int_{\left[\frac{1}{\varrho\sqrt{2}},\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\right]^2} \left(\frac{v}{u}\right)^{2x-1} e^{-\left(u^2+v^2\right)} du dv$

$= \int_{1/\varrho\sqrt{2}}^{\varrho/\sqrt{2}} \frac{e^{-u^2}}{u^{2x-1}} du \times \int_{1/\varrho\sqrt{2}}^{\varrho/\sqrt{2}} v^{2x-1} e^{-v^2} dv$

$= \int_{1/\varrho\sqrt{2}}^{\varrho/\sqrt{2}} u^{1-2x} e^{-u^2} du \times \int_{1/\varrho\sqrt{2}}^{\varrho/\sqrt{2}} v^{2x-1} e^{-v^2} dv$

Posons dans la première intégrale $t = u^2$ et dans la seconde $t = v^2$.
On obtient :
$F\left(\frac{1}{\varrho\sqrt{2}}, \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} \int_{1/2\varrho^2}^{\varrho^2/2} t^{-x} e^{-t} dt \times \int_{1/2\varrho^2}^{\varrho^2/2} t^{x-1} e^{-t} dt$
Comme $x \in]0,1[$, $1-x$ et $x > 0$ et $\Gamma(x)$, $\Gamma(1-x)$ ont un sens. D'où :

$$\boxed{\lim_{\varrho\to+\infty} F\left(\frac{1}{\varrho\sqrt{2}}, \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} t^{-x} e^{-t} dt \times \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{4}}$$

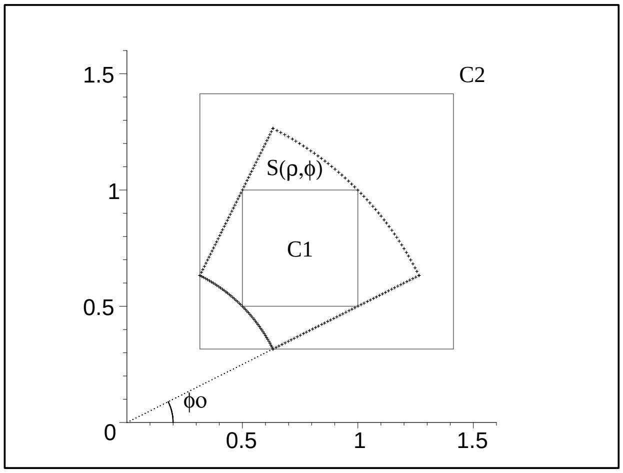
En outre $F\left(\frac{\sin(\varphi)}{\varrho}, \varrho\right) = \frac{1}{4} \int_{\sin^2\varphi/\varrho^2}^{\varrho^2} t^{-x} e^{-t} dt \times \int_{\sin^2\varphi/\varrho^2}^{\varrho^2} t^{x-1} e^{-t} dt$

et $\lim_{\varrho\to+\infty}\left(\lim_{\varphi\to 0} F\left(\frac{\sin(\varphi)}{\varrho}, \varrho\right)\right) = \lim_{\varrho\to+\infty} \frac{1}{4} \int_0^{\varrho^2} t^{-x} e^{-t} dt \times \int_0^{\varrho^2} t^{x-1} e^{-t} dt$

$= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} t^{-x} e^{-t} dt \times \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{4}$. D'où :

$$\boxed{\lim_{\varrho\to+\infty} F\left(\frac{1}{\varrho\sqrt{2}},\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{4}=\lim_{\varrho\to+\infty}\left(\lim_{\varphi\to 0} F\left(\frac{\sin(\varphi)}{\varrho},\varrho\right)\right)}$$

5.



Pour $\varphi\in\left]0,\arctan\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right]$, $\forall(x,y)\in C\left(\frac{1}{\varrho\sqrt{2}},\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\right)$, l'on a $\frac{1}{\varrho^2}\le x^2+y^2\le\varrho^2\Rightarrow$ $\frac{1}{\varrho}\le r\le\varrho$ (en posant $x=r\cos(t),\ y=r\sin(t)$ avec $r\ge 0$ et $t\in[0,Pi/2]$.

En outre $\tan(t)=\frac{y}{x}\in\left[\frac{1}{\varrho^2},\varrho^2\right]\Rightarrow t\in\left[\varphi_0,\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right]\subset\left[\varphi,\frac{\pi}{2}-\varphi\right]$ (en posant $\varphi_0=\arctan\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)$).
D'où $C\left(\frac{1}{\varrho\sqrt{2}},\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\right)\subset S(\varrho,\varphi)$.

L'ordonnée minimum d'un point de $S(\varrho,\varphi)$ est $\frac{\sin(\varphi)}{\varrho}$, tandis que l'ordonnée maximum d'un point de $S(\varrho,\varphi)$ est $\varrho\cos(\varphi)\le\varrho$. Donc $\forall(x,y)\in S(\varrho,\varphi)$, $\frac{\sin(\varphi)}{\varrho}\le y\le\varrho$ et par symétrie $\frac{\sin(\varphi)}{\varrho}\le x\le\varrho$.

D'où : $S(\varrho,\varphi)\subset C\left(\frac{\sin(\varphi)}{\varrho},\varrho\right)$. On a montré :

$$\boxed{C\left(\frac{1}{\varrho\sqrt{2}},\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\right)\subset S(\varrho,\varphi)\subset C\left(\frac{\sin(\varphi)}{\varrho},\varrho\right)}$$

On en déduit que $\forall\varrho>1,\forall\varphi\in\left]0,\arctan\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right]$,

$$\boxed{F\left(\frac{1}{\varrho\sqrt{2}},\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\right)\le G(\varrho,\varphi)\le F\left(\frac{\sin(\varphi)}{\varrho},\varrho\right)}$$

6. L'on en déduit que :
$\lim_{\varrho\to+\infty}\left(\lim_{\varphi\to 0}F\left(\frac{1}{\varrho\sqrt{2}},\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\right)\right)\le\lim_{\varrho\to+\infty}\left(\lim_{\varphi\to 0}G(\varrho,\varphi)\right)\le\lim_{\varrho\to+\infty}\left(\lim_{\varphi\to 0}F\left(\frac{\sin(\varphi)}{\varrho},\varrho\right)\right)$
$\Rightarrow\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{4}\le\frac{I(x)}{2}\le\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{4}$ (d'après les questions III.3 et III.4), ce qui donne :

$$\boxed{\forall x\in\,]0,1[\,,\ \Gamma(x)\Gamma(1-x)=2I(x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$$

Conclusion
1. D'après la formule des compléments,
$\forall x \in \left]0,1\right[$, $\ln\left(\Gamma(x)\right) + \ln\left(\Gamma(1-x)\right) = \ln(\pi) - \ln\left(\sin \pi x\right)$ et en dérivant, on obtient :
$\forall x \in \left]0,1\right[$, $\Psi(x) - \Psi(1-x) = -\pi\cot(\pi x)$ ou encore :

$$\boxed{\forall x \in \left]0,1\right[\,,\ \Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi\cot(\pi x)}$$

2.a. La fraction étant paire et α étant un pôle simple, on a :

$$\boxed{\frac{1}{X^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{-1}{X+\alpha} + \frac{1}{X-\alpha}\right)}$$

b. $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2-\alpha^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{-1}{k+\alpha} + \frac{1}{k-\alpha}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{-1}{k+\alpha} + \frac{1}{k-\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(-\Psi\left(k+\alpha+1\right) + \Psi\left(k+\alpha\right)\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\Psi\left(k+1-\alpha\right) - \Psi\left(k-\alpha\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left(-\Psi\left(n+\alpha+1\right) + \Psi\left(1+\alpha\right) + \Psi\left(n+1-\alpha\right) - \Psi\left(1-\alpha\right)\right).\ \text{d'où :}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\left(\Psi\left(1+\alpha\right) - \Psi\left(1-\alpha\right)\right) + \frac{1}{2\alpha}\left(\Psi\left(n+1-\alpha\right) + \Psi\left(n+1+\alpha\right)\right)}$$

3.a. $\Psi = \left(\ln\Gamma\right)' \Rightarrow \Psi' = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$

$$\Rightarrow \Psi'' = \frac{\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$$

Or $\forall x > 0,\ f:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}\\ t \to t^{(x-1)/2}e^{-t/2}\end{array}$ et $g:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}\\ t \to \left|\ln t\right| t^{(x-1)/2}e^{-t/2}\end{array}$ sont continues et leurs intégrales sur $\mathbb{R}^{+*}$ existent. On a alors :
$\left|\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)dt} \Rightarrow$
$\left|\int_0^{+\infty} \left|\ln t\right| t^{x-1}e^{-t}dt\right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt}\sqrt{\int_0^{+\infty} \ln^2(t)t^{x-1}e^{-t}}dt$
Or : $\left|\int_0^{+\infty} \left(\ln t\right).t^{x-1}e^{-t}dt\right| \leq \left|\int_0^{+\infty} \left|\ln t\right| t^{x-1}e^{-t}dt\right|$.
Donc $\left|\Gamma'(x)\right| \leq \sqrt{\Gamma(x)}\sqrt{\Gamma''(x)} \Rightarrow \Gamma'^2(x) - \Gamma(x)\Gamma''(x) \leq 0$ et $\Psi'(x) \geq 0$.
D'où <u>Ψ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.</u>
b.On en déduit, pour tout $n \geq 1$:
$0 \leq \Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n)$ car α et $1-\alpha > 0$

$$\leq \Psi(n+2) - \Psi(n+1) + \Psi(n+1) - \Psi(n)$$

$$\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$

On a montré :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ 0 \leq \Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}}$$

4. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) = 0$. En faisant alors tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité démontrée en 2.b., on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\left(\Psi\left(1+\alpha\right) - \Psi\left(1-\alpha\right)\right)}$$

∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞

Rédigé par

Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6, *allée Chaptal*, 22000 *StBrieuc*
Tel. 0296639414
Adresse électronique : *BRON.Pierre@wanadoo.fr*

à l'aide de Scientific Workplace