

A. Préliminaire

1) On pose : $j = \exp(i\frac{2\pi}{3})$; $j^3 = 1$; $j^4 + j^2 + 1 = j^2 + j + 1 = 0$.

$$2) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit χ_A le polynôme caractéristique de A .

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + \lambda^2 + 1.$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda^2 - j)(\lambda^2 - j^2) = (\lambda^2 - j^4)(\lambda^2 - j^2) = (\lambda - j)(\lambda + j)(\lambda - j^2)(\lambda + j^2).$$

Le polynôme $\chi_A(\lambda)$ est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable.

a) Cherchons le sous espace propre $E_j(A)$ associé à la valeur propre j :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = jx \\ z = jy \\ t = jz \\ -x - z = jt \end{cases} ; E_j(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \text{ est une matrice réelle et } j = \overline{j^2} \text{ alors } E_{j^2}(A) = \overline{\mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Cherchons le sous espace propre $E_{-j}(A)$ associé à la valeur propre $-j$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -j \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -jx \\ z = -jy \\ t = -jz \\ -x - z = -jt \end{cases} ; E_{-j}(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ j^2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$A \text{ est une matrice réelle et } \overline{-j} = -j^2 \text{ alors } E_{-j^2}(A) = \overline{\mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ j^2 \\ -1 \end{pmatrix}} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -j^2 \\ j \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où la matrice inversible : $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & j^2 & -j & -j^2 \\ j^2 & j & j^2 & j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice diagonale

$D = \text{diag}(j, j^2, -j, -j^2)$ qui vérifient la relation : $U^{-1}AU = D$.

3) Posons : $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \\ k(t) \end{pmatrix}$ et l'équation différentielle : $X' = AX$ (1).

(1) $\Leftrightarrow X' = UDU^{-1}X \Leftrightarrow Z' = DZ$ (avec $Z = U^{-1}X$). Posons : $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$.

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} u' = ju \\ v' = j^2v \\ w' = -jw \\ \theta' = -j^2\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = \alpha \exp(jt) \\ v(t) = \beta \exp(j^2t) \\ w(t) = \gamma \exp(-jt) \\ \theta(t) = \delta \exp(-j^2t) \end{cases} ; \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ constantes complexes arbitraires.}$

La solution générale de (1) est : $X(t) = \begin{pmatrix} \alpha \exp(jt) + \beta \exp(j^2t) + \gamma \exp(-jt) + \delta \exp(-j^2t) \\ j(\alpha \exp(jt) + \beta \exp(j^2t) - \gamma \exp(-jt) - \delta \exp(-j^2t)) \\ j(\alpha j \exp(jt) + \beta \exp(j^2t) + \gamma j \exp(-jt) + \delta \exp(-j^2t)) \\ \alpha \exp(jt) + \beta \exp(j^2t) - \gamma \exp(-jt) - \delta \exp(-j^2t) \end{pmatrix}$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes complexes arbitraires.

4) Posons : $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$; $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \\ y^{(4)} \end{pmatrix}$. et l'équation : (2) $y^{(4)} + y'' + y = 0$.

y est solution de (2) si et seulement si $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \\ y^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \\ -y - y'' \end{pmatrix} = AY$.

y est solution de (2) si et seulement si Y est solution de (1).

Alors la solution générale de (2) est $y(t) = \alpha \exp(jt) + \beta \exp(j^2t) + \gamma \exp(-jt) + \delta \exp(-j^2t)$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes complexes arbitraires.

$([t \mapsto \exp(jt)], [t \mapsto \exp(j^2t)], [t \mapsto \exp(-jt)], [t \mapsto \exp(-j^2t)])$ est une base de l'ensemble des solutions complexes de (2).

Par passage aux parties réelles et imaginaires de ces solutions, on déduit que les solutions réelles de (2) sont celles de la forme:

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})) + e^{\frac{1}{2}t}(\gamma \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \delta \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})).$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes réelles arbitraires.

B. Un lemme de du Bois-Reymond

5) Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $h(t) = (1 - t^2)^3$ si $|t| \leq 1$ et $h(t) = 0$ si non.
 h est classe C^2 sur chacun des intervalles : $] -\infty, -1[$; $] -1, 1[$; $]1, +\infty[$.

$$h'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 1 \\ -6t(1 - t^2)^2 & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{si } t < -1 \end{cases} ; \quad \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t \neq -1}} h'(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t \neq 1}} h'(t) = 0.$$

$$h''(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 1 \\ -6(1 - t^2)^2 + 24t^2(1 - t^2) & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{si } t < -1 \end{cases} ; \quad \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t \neq -1}} h''(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t \neq 1}} h''(t) = 0.$$

alors h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ avec : $h'(1) = h''(1) = h'(-1) = h''(-1) = 0$.

$$h'''(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 1 \\ 24t(1 - t^2) + 48t(1 - t^2) - 48t^3 & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{si } t < -1 \end{cases} ;$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t < -1}} h'''(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} h'''(t) = 0 \text{ et } \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t < -1}} h'''(t) = 48 \text{ et } \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} h'''(t) = -48.$$

$h'''(1)$ et $h'''(-1)$ n'existent pas, donc h n'est pas de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

6) Soient x_0, x_1 des nombres réels tels que : $x_0 < x_1$.

Soit $u(t) = \frac{x_1 - x_0}{2}t + \frac{x_1 + x_0}{2}$; u est C^2 sur $\mathbb{R}$ et $u(-1) = x_0$ et $u(1) = x_1$ et $u(]x_0, x_1[) =]-1, 1[$.

$g = h \circ u$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (comme composée de deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$)
 $g(]x_0, x_1[) = h(]-1, 1[) \subset \mathbb{R}^{*+}$ et $g(\mathbb{R} \setminus]x_0, x_1[) = h(\mathbb{R} \setminus]-1, 1[) = \{0\}$.

7) Soit $F \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que : $\int_0^1 F(x)u(x)dx = 0$ pour tout $u \in E_{0,0}^2$.

On rappelle que : $E_{0,0}^2 = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^2 \text{ telles que } f(0) = f(1) = 0\}$.

Par l'absurde supposons que F n'est pas identiquement nulle sur $[0, 1]$, puisque F est continue sur $[0, 1]$, il existe $x_0, x_1 \in [0, 1]$ tels que : $x_0 < x_1$ et F ne s'annule pas sur $[x_0, x_1]$.
donc F garde un signe constant sur $[x_0, x_1]$.

D'après la question précédente, il existe une fonction g de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que :
 $g(]x_0, x_1[) = h(]-1, 1[) \subset \mathbb{R}^{*+}$ et $g(\mathbb{R} \setminus]x_0, x_1[) = h(\mathbb{R} \setminus]-1, 1[) = \{0\}$.

Soit u la restriction de g à $[-1, 1]$, on a : $u \in E_{0,0}^2$ et donc : $\int_0^1 F(x)u(x)dx = 0 = \int_{x_0}^{x_1} F(x)g(x)dx$.

L'application : $[x \mapsto F(x)g(x)]$ est continue non identiquement nulle et garde un signe constant sur $[x_0, x_1]$ alors $\int_{x_0}^{x_1} F(x)g(x)dx \neq 0$ ce qui est absurde.

C. Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

Dans cette partie, on prend $E = E_{a,b}^2$ et J la fonction définie sur E par la formule :

$J(f) = \int_0^1 [P(f(x)) + Q(f'(x))] dx$; où $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes fixés.

Soit $f_0 \in E$. On suppose que : $\forall f \in E$; $J(f_0) \leq J(f)$. Soit $u \in E_{0,0}^2$.

8) On pose : $q(t) = J(f_0 + tu) = \int_0^1 [P(f_0(x) + tu(x)) + Q(f_0'(x) + tu'(x))] dx$.

Si $P = \sum_{i=0}^r \alpha_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^r \beta_i X^i$ alors $[P(f_0(x) + tu(x)) + Q(f_0'(x) + tu'(x))] = \sum_{i=0}^r \gamma_i(x) t^i$

avec $\gamma_0, \dots, \gamma_r$ sont des applications continues sur $[0, 1]$.

Alors : $\forall t \in \mathbb{R}$; $q(t) = \sum_{i=0}^r a_i X^i$ avec : $\forall i = 0, \dots, r$; $a_i = \int_0^1 \gamma_i(x) dx$.

$$[P(f_0(x) + tu(x)) + Q(f_0'(x) + tu'(x))] = \sum_{i=0}^r \alpha_i (f_0(x) + tu(x))^i + \sum_{i=0}^r \beta_i (f_0'(x) + tu'(x))^i$$

$$[P(f_0(x) + tu(x)) + Q(f_0'(x) + tu'(x))] = \sum_{i=0}^r \alpha_i \sum_{k=0}^i C_i^k t^k u(x)^k f_0(x)^{i-k} + \sum_{i=0}^r \beta_i \sum_{k=0}^i C_i^k t^k u'(x)^k f_0'(x)^{i-k}$$

Le coefficient de t dans cette somme est :

$$u(x) \sum_{i=1}^r \alpha_i C_i^1 f_0(x)^{i-1} + u'(x) \sum_{i=1}^r \beta_i C_i^1 f_0'(x)^{i-1} = u(x) \sum_{i=1}^r i \alpha_i f_0(x)^{i-1} + u'(x) \sum_{i=1}^r i \beta_i f_0'(x)^{i-1}$$

$$= u(x) P'(f_0(x)) + u'(x) Q'(f_0'(x)).$$

D'où : $a_1 = \int_0^1 (u(x) P'(f_0(x)) + u'(x) Q'(f_0'(x))) dx$.

9) On suppose que pour tout $f \in E$; $J(f_0) \leq J(f)$.

On a : $\forall t \in \mathbb{R}$; $\forall u \in E_{0,0}^2$; $f_0 + tu \in E$. Alors : $\forall t \in \mathbb{R}$; $q(0) \leq q(t)$.

D'où : $q'(0) = 0 = a_1$.

$$a_1 = \int_0^1 (u(x) P'(f_0(x)) + u'(x) Q'(f_0'(x))) dx = 0.$$

$$a_1 = \int_0^1 (u(x) (P'(f_0(x)) - \frac{d}{dx} Q'(f_0'(x))) + (u(x) \frac{d}{dx} Q'(f_0'(x)) + u'(x) Q'(f_0'(x)))) dx = 0$$

$$a_1 = \int_0^1 (u(x) (P'(f_0(x)) - \frac{d}{dx} Q'(f_0'(x)))) dx + \left[u(x) Q'(f_0'(x)) \right]_0^1 = \int_0^1 (u(x) (P'(f_0(x)) - \frac{d}{dx} Q'(f_0'(x)))) dx$$

$$\text{alors : } \forall u \in E_{0,0}^2 ; \int_0^1 u(x) (P'(f_0(x)) - \frac{d}{dx} Q'(f_0'(x))) dx$$

L'application $\left[x \mapsto P'(f_0(x)) - \frac{d}{dx} [Q'(f_0'(x))] \right]$ est continue sur $[0, 1]$, alors d'après la question 7) cette application est nulle. d'où f_0 vérifie l'équation différentielle :

$$P'(f_0(x)) = \frac{d}{dx} [Q'(f_0'(x))] \quad (\Delta).$$

Exemples :

Premier exemple

10) On choisit ici $E = E_{0,1}^2$ et $J = J_1$ définie par : $J_1(f) = \int_0^1 (f'(x))^2 dx$.

On est alors dans la cas : $P = 0$ et $Q = X^2$.

L'équation différentielle (Δ) s'écrit alors : $0 = \frac{d}{dx} [2f_0'(x)] = 2f_0''(x)$.

il existe $r, s \in \mathbb{R}$; telles que : $f_0(x) = rx + s$; $f_0(0) = s = 0$ et $f_0(1) = r = 1$. $f_0(x) = x$.

11) $J_1(f) = \int_0^1 (f'(x))^2 dx$. Soit $f \in E_{0,1}^2$; $f_0'(x) = 1$

$$J_1(f) = J_1(f_0 + (f - f_0)) = \int_0^1 (f_0'(x) + (f - f_0)'(x))^2 dx = 1 + 2 \int_0^1 (f - f_0)'(x) dx + \int_0^1 ((f - f_0)'(x))^2 dx$$

$$\int_0^1 (f - f_0)'(x) dx = [(f - f_0)(x)]_0^1 = 0 \text{ et } J_1(f) \geq 1 = J_1(f_0).$$

D'après ce qui précède, si J_1 admet un minimum sur $E_{0,1}^2$ alors ce minimum est unique donné par : $f_0(x) = x$. sa valeur est donc donné par : $J_1(f_0) = \int_0^1 (f_0'(x))^2 dx = 1$.

Deuxième exemple

12) On choisit $E = E_{0,0}^2$ et $J = J_2$ définie par : $J_2(f) = \int_0^1 [f'(x)^2 + f'(x)^3] dx$.

On est alors dans le cas où $P = 0$ et $Q = X^2 + X^3$.

L'équation différentielle (Δ) s'écrit alors : $0 = \frac{d}{dx} [2f_0'(x) + 3f_0'(x)^2] = 2f_0''(x) + 6f_0'(x)f_0''(x)$.

$3f_0'(x)^2 + 2f_0'(x)$ est constante sur $[0, 1]$; $\lambda = (f_0'(x) + \frac{1}{3})^2$ est constante sur $[0, 1]$.

$f_0'(x)$ ne peut prendre que deux valeurs sur $[0, 1]$. Mais f_0' est continue sur le segment $[0, 1]$ alors f_0' est constante sur $[0, 1]$ et f_0 est affine de la forme $f_0(x) = rx + s$ et puisque $f_0(0) = f_0(1) = 0$ alors f_0 est nulle.

13) $f(x) = x^2(1-x)$; $\forall t \in \mathbb{R}$; $tf \in E_{0,0}^2$.

$$f'(x) = 2x(1-x) - x^2 = 2x - 3x^2.$$

$$J_2(tf) = t^2 \int_0^1 [f'(x)^2 + tf'(x)^3] dx = t^2 \int_0^1 [4x^2 + 9x^4 - 12x^3 + 8tx^3 - 36tx^4 + 54tx^5 - 27tx^6] dx.$$

$$J_2(tf) = t^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{9}{5} - 3 + t(2 - \frac{36}{5} + 9 - \frac{27}{7}) \right) = \frac{t^2}{105} (140 + 189 - 315 + t(210 - 756 + 945 - 405))$$

$$J_2(tf) = \frac{t^2}{105} (14 - 6t).$$

$$J_2(3f) < 0 = J_2(f_0) < J_2(2f).$$

D'où J_2 n'admet pas de minimum sur $E_{0,0}^2$.

D. Un exemple avec dérivée seconde

Dans cette partie $E = \{f \in C^4(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ telles que : } f^2 \text{ et } f''^2 \text{ soient intégrables sur } \mathbb{R}_+\}$

14) Soit $f \in E$, alors ff'' est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|ff''| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |f''|^2)$.

on déduit alors que ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par l'absurde supposons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)f'(x) = +\infty$.

Posons : $h(x) = f(x)^2$; $h'(x) = 2f(x)f'(x)$, alors il existe $a > 0$ tq : $h(a) > 0$ et $\forall x \geq a$; $h'(x) > 0$.

h est strictement croissante sur $[a, +\infty[$; $\forall x \geq a$; $\int_a^x h(t)dt \geq (x-a)h(a) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

ceci est absurde car h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'où $f(x)f'(x)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

15) Pour tout $a > 0$, $\int_0^a f(t)f''(t)dt = f(a)f'(a) - f(0)f'(0) - \int_0^a f'(t)^2 dt$.

Puisque $f(x)f'(x)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante de $\mathbb{R}_+$, telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ et la suite $(f(a_n)f'(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \int_0^{a_n} f'(t)^2 dt = \int_0^{a_n} f(t)f''(t)dt + f(0)f'(0) - f(a_n)f'(a_n).$$

De plus ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors la suite $\left(\int_0^{a_n} f'(t)^2 dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, d'où $f' \in L^2$.

On déduit alors que la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(t)^2 dt$ existe, et de l'égalité :

$$\int_0^x f(t)f''(t)dt = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f'(t)^2 dt$$

On déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Posons : $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)f'(x)$.

Par l'absurde supposons que $l \neq 0$; alors il existe $a > 0$ tel que : $h(x) = f(x)^2$ définit une application strictement monotone sur $[a, +\infty[$ et $\forall x \in [a, +\infty[$; $|h'(x)| \geq |l|$ et $h'(x)l > 0$.

$\int_a^x h(t)dt = h(a)(x-a) + \int_a^x (h(t) - h(a))dt$. selon le théorème des accroissements finis :

$$\left| \int_a^x (h(t) - h(a))dt \right| \geq \int_a^x |l|(t-a)dt = |l| \frac{(x-a)^2}{2}.$$

$$\int_a^x h(t)dt \geq -|h(a)|(x-a) + |l| \frac{(x-a)^2}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty. \text{ ceci contredit le fait que } f \in L^2.$$

On déduit finalement que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)f'(x) = 0$.

N.B :

Dans cette partie, la fonction J est définie par : $J(f) = \int_0^{+\infty} [f(x)^2 - f'(x)^2 + f''(x)^2] dx$

On admettra que si la fonction J présente un minimum en un élément f de E , alors f est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle : (2) $y^{(4)} + y'' + y = 0$.

16) On a vu dans 4) que la solution générale de (2) est :

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})) + e^{\frac{1}{2}t}(\gamma \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \delta \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})).$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes réelles arbitraires.

Posons : $y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$

y_1 est de classe C^4 sur $\mathbb{R}_+$; $|y_1(t)|^2 = O(e^{-t})$ et $[t \mapsto e^{-t}]$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'où $y_1 \in L^2$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ ; y_1'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})) + e^{-\frac{1}{2}t}(-\alpha \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$$

$$y_1'(t) \text{ est aussi de la forme : } y_1'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha' \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta' \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$$

alors aussi $y_1''(t)$ est de la forme : $y_1''(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha'' \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta'' \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$ donc $y_1'' \in L^2$.

On déduit alors que $y_1 \in E$.

Posons : $y_2(t) = e^{\frac{1}{2}t}(\gamma \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \delta \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ ; y_2'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}(\gamma \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \delta \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{1}{2}t}(-\gamma \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \delta \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2})).$$

$$y_2(t)y_2'(t) = \frac{1}{2}e^t(\gamma \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \delta \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}e^t(\gamma \delta \cos(t\sqrt{3}) + (\frac{\delta^2 - \gamma^2}{2}) \sin(t\sqrt{3})).$$

Pour tout entier naturel n on a :

$$y_2(\frac{4n\pi}{\sqrt{3}})y_2'(\frac{4n\pi}{\sqrt{3}}) = (\frac{\gamma^2}{2} + \gamma\delta\frac{\sqrt{3}}{2})e^{\frac{4n\pi}{\sqrt{3}}}.$$

$$y_2(\frac{(4n+1)\pi}{\sqrt{3}})y_2'(\frac{(4n+1)\pi}{\sqrt{3}}) = (\frac{\delta^2}{2} - \gamma\delta\frac{\sqrt{3}}{2})e^{\frac{(4n+1)\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Si $y_2 \in E$, alors d'après 15) les deux expressions précédentes tendent vers 0 quand n tend

vers l'infini. $y_2(\frac{4n\pi}{\sqrt{3}})y_2'(\frac{4n\pi}{\sqrt{3}}) + e^{\frac{-\pi}{\sqrt{3}}}y_2(\frac{(4n+1)\pi}{\sqrt{3}})y_2'(\frac{(4n+1)\pi}{\sqrt{3}}) = (\frac{\gamma^2 + \delta^2}{2})e^{\frac{4n\pi}{\sqrt{3}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

alors $y_2 \in E$ si et seulement si $\gamma = \delta = 0$.

L^2 étant un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on déduit alors que les solutions de (2) qui appartiennent à E sont les fonctions :

$$y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})) \text{ avec } \alpha, \beta \text{ constantes réelles arbitraires.}$$

On note : $\forall t \in \mathbb{R}_+ ; e_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2})$ et $e_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})$.

N.B :

On admettra que pour tous réels α, β : $J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3\beta^2}{4} + \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{2}$.

On posera également, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3})$.

17) Le polynôme caractéristique de l'équation (3) $y'' + y' + y = 0$ est

$$T(\mu) = \mu^2 + \mu + 1 = (\mu - j)(\mu - \bar{j}) \text{ et } j = \bar{j}^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Alors la solution générale de (3) est :

$$y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha \cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta \sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})) \text{ avec } \alpha, \beta \text{ constantes réelles arbitraires.}$$

Si J présente un minimum en un élément f de E alors d'après la question précédente f est de type y_1 et donc f est solution de (3).

Il existe $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ tels que : $f = \alpha_0 e_1 + \beta_0 e_2$.

On pose : $\varphi(\alpha, \beta) = J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3\beta^2}{4} + \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{2}$.

φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et présente un minimum au point (α_0, β_0) , alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\alpha_0, \beta_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}(\alpha_0, \beta_0) = 0 \text{ c\`ad : } \begin{cases} \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{3} = 0 \\ 3\beta_0 + \alpha_0 \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{3} = 0.$$

$$\text{Alors : } f(t) = 2\beta_0 e^{-\frac{1}{2}t} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \right)$$

$$f(t) = 2\beta_0 e^{-\frac{1}{2}t} \left(\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \right) = 2\beta_0 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $f = \lambda \psi$.

$$18) \text{ Posons : } I(A) = \int_0^A [f(x)^2 - f'(x)^2 + f''(x)^2] dx - \int_0^A [f(x) + f'(x) + f''(x)]^2 dx$$

$$I(A) = \int_0^A (-2f'(x)^2 - 2f(x)f'(x) - 2f(x)f''(x) - 2f'(x)f''(x)) dx$$

$$I(A) = -2 \int_0^A f'(x)^2 dx - 2 \int_0^A f(x)f''(x) dx - [f(x)^2]_0^A - [f'(x)^2]_0^A$$

$$I(A) = -2 \int_0^A f'(x)^2 dx - 2[f(x)f'(x)]_0^A + 2 \int_0^A f'(x)^2 dx - [f(x)^2]_0^A - [f'(x)^2]_0^A$$

$$I(A) = -2[f(x)f'(x)]_0^A - [f(x)^2]_0^A - [f'(x)^2]_0^A = (f(0) + f'(0))^2 - (f(A) + f'(A))^2$$

Si $f \in A$ alors f, f', f'' sont dans L^2 alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} I(A)$ existe et donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} (f(A) + f'(A))^2$ existe

aussi.

Mais l'application $\left[t \mapsto (f(t) + f'(t))^2 \right]$ est int\`egrable sur $\mathbb{R}_+$, alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} (f(A) + f'(A))^2 = 0$.

$$J(\lambda \psi) = \lambda^2 \int_0^{+\infty} [\psi(x)^2 - \psi'(x)^2 + \psi''(x)^2] dx.$$

Pour tout r\`eel $A > 0$, on pose :

$$I_\lambda(A) = \lambda^2 \int_0^A [\psi(x)^2 - \psi'(x)^2 + \psi''(x)^2] dx - \lambda^2 \int_0^A [\psi(x) + \psi'(x) + \psi''(x)]^2 dx.$$

Mais ψ est solution de l'\`equation diff\`erentielle : (3) $y'' + y' + y = 0$.

$$I_\lambda(A) = \lambda^2 \int_0^A [\psi(x)^2 - \psi'(x)^2 + \psi''(x)^2] dx = \lambda^2 (\psi(0) + \psi'(0))^2 - \lambda^2 (\psi(A) + \psi'(A))^2.$$

$$J(\lambda \psi) = \lambda^2 (\psi(0) + \psi'(0))^2 - \lambda^2 \lim_{A \rightarrow +\infty} (\psi(A) + \psi'(A))^2 = \lambda^2 (\psi(0) + \psi'(0))^2.$$

$$\psi(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(t \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \text{ et } \psi'(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(t \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(t \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\psi(t) + \psi'(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(t \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(t \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(t \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} ; J(\lambda \psi) = 0.$$

D'apr\`es ce qui pr\`ec\`ede : Pour tout  $f$  \`el\`ement de E , on a :

$$\int_0^A [f(x)^2 - f'(x)^2 + f''(x)^2] dx = \int_0^A [f(x) + f'(x) + f''(x)]^2 dx + (f(0) + f'(0))^2 - (f(A) + f'(A))^2$$

$$\text{et donc : } J(f) = \int_0^{+\infty} [f(x) + f'(x) + f''(x)]^2 dx + (f(0) + f'(0))^2 \geq 0.$$

D'o\`u J admet un minimum au point $\lambda \psi$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$.

19) D'apr\`es la question pr\`ec\`edente :

$$\forall f \in E ; J(f) = \int_0^{+\infty} [f(x) + f'(x) + f''(x)]^2 dx + (f(0) + f'(0))^2 \geq 0.$$

L'application $\left[x \mapsto [f(x) + f'(x) + f''(x)]^2 \right]$ est continue positive sur $\mathbb{R}_+$, alors $J(f) = 0$ si et seulement si f est solution de l'\`equation diff\`erentielle : (3) $y'' + y' + y = 0$ et $f(0) + f'(0) = 0$.

si et seulement si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R} ; \forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\alpha \cos\left(x \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \beta \sin\left(x \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right)$

$$f(x) + f'(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \left(\alpha \cos\left(x \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \beta \sin\left(x \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) + e^{-\frac{x}{2}} \left(-\alpha \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(x \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \beta \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(x \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right)$$

$$f(0) + f'(0) = 0 = \frac{\alpha}{2} + \beta \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On retrouve alors la m\`eme forme de fonction trouv\`ee dans la question 17), c'est \`a dire

$J(f) = 0$ si et seulement si f est de la forme : $f = \lambda \psi$ avec λ un r\`eel.

On retrouve alors le r\`esultat de la question 18).

E. Application : une inégalité de Hardy et Littlewood

On reprend les notations de la question précédente, et pour tout $g \in L^2$, on note

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} g(x)^2 dx}$$

20) Soit $f \in L^2$, $\mu > 0$, et $A > 0$. on pose : $u = \mu x$

$$\int_0^A f(\mu x)^2 dx = \frac{1}{\mu} \int_0^A f(x)^2 dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu} \|f\|^2$$

Alors $f_\mu(x) = f(\mu x)$ définit un élément de L^2 .

Si de plus $f \in E$, alors d'une part f_μ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geq 0$; $f_\mu''(x) = \mu^2 f''(\mu x)$ alors puisque $f'' \in L^2$, l'étape précédente permet de déduire que $f_\mu \in E$.

D'après la question précédente : $\forall \mu > 0$; $J(f_{\sqrt{\mu}}) \geq 0$.

$$\forall \mu > 0 ; \mu^2 \|f''\|^2 - \mu \|f'\|^2 + \|f\|^2 \geq 0. \text{ (inégalité aussi vraie pour } \mu \leq 0 \text{)}$$

$$\forall \mu \in \mathbb{R} ; \mu^2 \|f''\|^2 - \mu \|f'\|^2 + \|f\|^2 \geq 0$$

$$\text{D'où le discriminant de ce trinôme est négatif, c'est à dire : } \Delta = \|f'\|^4 - 4\|f\|^2 \|f''\|^2 \leq 0$$

$$\text{Finalement : } \forall f \in E ; \|f'\|^2 \leq 2\|f\| \|f''\|.$$

21) Si $f \in E$ tel que : $\|f'\|^2 = 2\|f\| \|f''\|$ alors $\Delta = 0$ et donc $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mu^2 \|f''\|^2 - \mu \|f'\|^2 + \|f\|^2 = 0.$$

Si $\mu \leq 0$ alors $\|f\| = 0$ et donc f est l'application nulle.

Si $\mu > 0$ alors $J(f_{\sqrt{\mu}}) = 0$, donc d'après ce qui précède il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $f_{\sqrt{\mu}} = \lambda \psi$

Conclusion :

Soit $f \in E$.

$$\|f'\|^2 = 2\|f\| \|f''\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \exists \mu > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}_+ ; f(x) = \lambda \psi\left(\frac{x}{\mu}\right) = \lambda e^{-\frac{x}{2\mu}} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2\mu} - \frac{\pi}{3}\right).$$