

Épreuve de mathématiques I
Correction

A-Préliminaires

- Il est clair que \mathcal{P} et \mathcal{D} sont des parties non vides \mathcal{E} , stables par addition et multiplication par un scalaire, donc ils sont des sous-espaces vectoriels de \mathcal{E} .
- Soit $f \in \mathcal{E}$. Les applications $t \mapsto f(x \sin t)$ et $t \mapsto f'(x \sin t)$ sont continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc les applications $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies sur I .

D'autre part, posons $g(x, t) = f(x \sin t)$ et $h(x, t) = f'(x \sin t)$. Par composition des applications, g et h sont de classe \mathcal{C}^∞ par rapport à la variable x et, $\forall n \in \mathbb{N}$, les applications $t \mapsto \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, t) = (\sin t)^n f^{(n)}(x \sin t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) = (\sin t)^n f^{(n+1)}(x \sin t)$ sont continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc d'après le théorème de régularité, $u(f)$ et $v(f)$ sont de classe \mathcal{C}^∞ sur I , donc $u(f), v(f) \in \mathcal{E}$.

Enfin, par linéarité de l'intégrale, les applications u et v sont linéaires. En conclusion, u et v définissent des endomorphismes de \mathcal{E} .

- Soit $x \mapsto p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathcal{P}$. Alors $\forall x \in I$, on a :

$$u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{i=0}^n (x \sin t)^i dt = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^n \left(a_i \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^i dt \right) x^i$$

est un polynôme en x , donc $u(p) \in \mathcal{P}$.

De même, on a :

$$v(f)(x) = a_0 + x \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{i=1}^n i (x \sin t)^{i-1} dt = a_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \left(a_i \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{i-1} dt \right) x^i$$

est un polynôme en x . Donc $v(p) \in \mathcal{P}$.

- Il est évident que $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$. Une intégration par parties donne, pour $n \geq 2$:

$$W_n = [-\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1)(W_{n-2} - W_n)$$

En multipliant par W_{n-1} on obtient :

$$nW_n W_{n-1} = (n-1)W_{n-1} W_{n-2}$$

c'est-à-dire la suite $(nW_n W_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante, donc $nW_n W_{n-1} = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$. Ou encore $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

- Si $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors $\sin^{p+1} t \leq \sin^p t$ et donc $W_{p+1} \leq W_p$. Il y a égalité si, et seulement si, $\sin t = 1$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Donc $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

D'autre part, on a $nW_n = (n-1)W_{n-2} \geq (n-1)W_{n-1}$, donc $\frac{n-1}{n} \leq \frac{W_n}{W_{n-1}}$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = 1$,

d'où $W_n \sim W_{n-1}$ et par suite de la relation $W_n W_{n-1} = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2n}$, on déduit que $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ et

comme $W_n > 0$, alors $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, en particulier $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0$.

B-Étude de la continuité de u et v

6. Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes, en conséquence pour tout $f \in \mathcal{E}$, la quantité $M(f)$ est bien définie.

Soit $f \in \mathcal{E}$ et $x \in I$, alors $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x \sin t \in I$ et donc

$$|u(f)(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(f) dt = M(f)$$

et donc $M(u(f)) \leq M(f)$. Ceci inégalité montre la continuité de l'application linéaire u sur l'espace vectoriel normé (\mathcal{E}, M) .

7. Considérons l'application définie sur I par $f_n(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^n$, on a bien $M(f_n) = 1$ et

$$v(f_n)(x) = \frac{x}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \left(\frac{x \sin t}{a}\right)^{n-1} dt = n \left(\frac{x}{a}\right)^n W_{n-1}.$$

Donc $M(u(f_n)) = nW_{n-1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(n-1)}} n$ quantité qui tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, donc l'application linéaire v n'est pas continue sur (\mathcal{E}, M) .

8. On a $N(f) = 0$ si, et seulement si, $M(f) = M(f') = 0$ et comme M est une norme alors $f = 0$. Les autres propriétés de la norme sont immédiates. Donc N définit bien une norme sur \mathcal{E} .

Soit $f \in \mathcal{E}$ et $x \in I$, alors on a :

$$|v(f)(x)| \leq |f(0)| + a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sup_{t \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f'(x \sin t)| dt = |f(0)| + a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sup_{u \in I} |f'(u)| dt \leq M(f) + \frac{a\pi}{2} M(f') \leq kN(f)$$

où $k = \sup\left(1, \frac{a\pi}{2}\right)$. Donc l'application linéaire v est continue de (\mathcal{E}, N) dans (\mathcal{E}, M) .

9. Soit $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$. f' étant continue sur le segment I , donc peut être approchée uniformément par une fonction polynomiale q (théorème de Weierstrass), donc $\forall x \in I$, $|f'(x) - q(x)| \leq \varepsilon$.

Soit p le polynôme dont la dérivée est $p'(x) = q(x)$ et $p(0) = f(0)$, c'est-à-dire $p(x) = \int q(x) dx + f(0)$.

Ainsi le polynôme p répond à la question.

D'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall x \in I$, $|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon|x| \leq a\varepsilon$. Donc on peut conclure que :

$$N(f - p) \leq a\varepsilon + \varepsilon = (1 + a)\varepsilon$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Donc \mathcal{P} est dense dans (\mathcal{E}, N) .

C-Étude de l'inversibilité de u et v

10. Soit $f : x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathcal{P}$, on a

$$u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^n (a_i w_i) x^i$$

et donc

$$v \circ u(f)(x) = u(f)(0) + x \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n (a_i w_i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} i(x \sin t)^{i-1} dt = \frac{2}{\pi} \left(a_0 W_0 + \sum_{i=1}^n i a_i W_i W_{i-1} x^i \right) = f(x).$$

Car $iW_i W_{i-1} = \frac{\pi}{2}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$. Donc $u(f) \in \mathcal{P}$.
De même, on a :

$$v(f)(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n \left(a_i \int_0^{\frac{\pi}{2}} i(\sin t)^{i-1} dt \right) x^i = a_0 + \sum_{i=1}^n i a_i W_{i-1} x^i.$$

Donc

$$u \circ v(p)(x) = \frac{2}{\pi} \left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i W_{i-1} W_i x^i \right) = f(x).$$

En conclusion $u \circ v(f) = v \circ u(f) = f$ pour tout $f \in \mathcal{P}$.

11. Soit $f \in E$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge vers f pour la norme N (\mathcal{P} dense dans (\mathcal{E}, N)), on a

$$u \circ v(p_n) = v \circ u(p_n) = p_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Par continuité de $u \circ v$ dans (\mathcal{E}, N) et par passage à la limite, on obtient :

$$u \circ v(f) = f.$$

Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{E}$, non nulle telle que $v(f) = 0$, alors l'égalité précédente entraîne $f = u \circ v(f) = u(0) = 0$, ce qui est absurde d'après le choix de f . Donc 0 n'est pas une valeur propre de v .

12. Comme dans la question précédente, on montre que $v \circ u(f) = f$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. En conclusion, on a, pour tout $f \in \mathcal{E}$, $u \circ v(f) = v \circ u(f) = id_{\mathcal{E}}(f)$, donc l'endomorphisme u est inversible et son inverse est l'endomorphisme v .

Applications

13. Soit $f \in \mathcal{E}$, on a :

$$\forall x \in I, \quad v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x \sin t) dt = f(0) + \frac{x\pi}{2} u(f')(x).$$

Soit $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} u(\arctan')(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan'(x \sin t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + x^2 \sin^2 t} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1 + x^2 + z^2} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + x^2} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{\left(\frac{z}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsh}'(x) \end{aligned}$$

D'où $u(\arctan') = \operatorname{argsh}'$.

D'après la formule précédente, $\arctan'(x) = v \circ v(\arctan')(x) = v(\operatorname{argsh}')(x) = \operatorname{argsh}(0) + \frac{x\pi}{2}u(\operatorname{argsh}'')(x)$ ou encore

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + \frac{x\pi}{2}u(\operatorname{argsh}'')(x)$$

D'où, pour tout $x \neq 0$,

$$u(\operatorname{argsh}'')(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{x}{1+x^2}$$

égalité qui reste vraie pour $x = 0$ par raison de continuité.

14. Si f est paire, alors $\forall x \in I, u(f)(-x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-x \sin t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \sin t) dt = u(f)(x)$, donc $u(f)$ est paire, de même si f est impaire, $u(f)$ est impaire.

Si f est paire, alors f' est impaire et donc $\forall x \in I$,

$$v(f)(-x) = f(0) - x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(-x \sin t) dt = f(0) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x \sin t) dt = v(f)(x),$$

donc $v(f)$ est paire, de même si f est impaire, $v(f)$ est impaire.

Inversement, si $u(f)$ est paire (respectivement impaire), $v(u(f)) = v \circ u(f) = f$ est paire (respectivement. impaire).

En conclusion, $f, u(f)$ et $v(f)$ sont de même parité.

D-Étude des valeurs et vecteurs propres de u et v

15. Soit λ une valeur propre de v (non nulle) et $f \in \mathcal{E}$ non nulle telle que $v(f) = \lambda f$, donc $f = u \circ v(f) = u(\lambda f)$ ou encore $u(f) = \frac{1}{\lambda} f$, c'est-à-dire $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u . De plus on a $E_\lambda(v) = E_{\frac{1}{\lambda}}(u)$.

16. Soit f une fonction développable en série entière de rayon de convergence

$R > 0$. Posons $\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de

nombre complexes. Pour $x \in]-R, R[$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x \sin t \in]-R, R[$, on pose

donc $h(t) = f(x \sin t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (\sin t)^n$. La fonction g est définie par une

série de fonction qui converge uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], |a_n x^n (\sin t)^n| \leq |a_n| |x|^n$$

D'où la possibilité d'intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-R, R[, \quad u(f)(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (\sin t)^n dt \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n x^n. \end{aligned}$$

Donc $u(f)$ est développable en série entière. En conclusion, \mathcal{D} est stable par u .

17. $f^{(n)}$ étant continue sur I , donc m_n est bien défini.

Soit λ une valeur propre de u et f un vecteur propre non nul associé. On a donc, $\forall x \in I$, $u(f)(x) = \lambda f(x)$. D'où,

$$u(f)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^{(n)}(x \sin t) (\sin t)^n dt,$$

donc

$$|\lambda| |f^{(n)}(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sup_{t \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f^{(n)}(x \sin t)| (\sin t)^n dt = \frac{2m_n}{\pi} W_n.$$

Puisque $\lambda \neq 0$, car u est inversible, alors

$$\forall x \in I, \quad |f^{(n)}(x)| \leq \frac{2m_n}{|\lambda|\pi} W_n.$$

D'où $m_n \leq \frac{2m_n}{|\lambda|\pi} W_n$, donc si $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_n \neq 0$, l'inégalité précédente devient

$1 \leq \frac{2}{|\lambda|\pi} W_n$ qui entraîne, quand n tend vers l'infini, l'inégalité contradictoire

$1 \leq 0$, car $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0$. Don il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m_n = 0$, c'est-à-dire

$\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = 0$, donc f est une fonction polynomiale.

18. D'après la question précédente il faut chercher les vecteurs propres parmi les fonctions polynomiales. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u et $f \in P$

non nulle tels que $u(f) = \lambda f$. Posons $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, alors

$$\begin{aligned} u(f)(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \sin t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^i dt a_i x^i \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^n w_i a_i x^i \end{aligned}$$

Donc $u(f) = \lambda f$ s'écrit $\forall x \in I, \sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{\pi} W_i - \lambda \right) a_i x^i = 0$ ou encore

$$\forall i, \left(\frac{2}{\pi} W_i - \lambda \right) a_i = 0.$$

Comme $f \neq 0$, alors il existe i tel que $a_i \neq 0$ et donc $\lambda = \frac{2}{\pi} W_i$.

Réciproquement, on vérifie que si $f_n(x) = x^n$, alors $\forall x \in I, u(f_n)(x) = \frac{2}{\pi} W_n f_n(x)$, ce qui montre que f_n est un vecteur propre associé à valeur propre $\frac{2}{\pi} W_n$.

En conclusion, l'ensemble des valeurs propre de u est $\text{sp}(u) = \left\{ \frac{2}{\pi} W_n / n \in \mathbb{N} \right\}$ et l'ensemble des vecteurs propres est $\{f_n / n \in \mathbb{N}\}$. D'après la question 15., l'ensemble des valeurs propre de v est $\text{sp}(v) = \left\{ \frac{\pi}{2W_n} / n \in \mathbb{N} \right\}$ et l'ensemble des vecteurs propres est $\{f_n / n \in \mathbb{N}\}$.

19. On sait que $\text{Vect}\{f_n, n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{P}$ est un sous-espace strictement inclus dans \mathcal{E} (la fonction exponentielle $\exp \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{P}$), donc \mathcal{E} n'admet pas une base de vecteurs propres ni de u ni de v .

On a $\text{sp}(u) = \left\{ \frac{2}{\pi} W_n / n \in \mathbb{N} \right\}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} W_n = 0 \notin \text{sp}(u)$, donc $\text{sp}(u)$ n'est pas un fermé de \mathbb{C} .

Soit une sous-suite $(\mu_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente de $\text{sp}(v) = \left\{ \mu_n / \mu_n = \frac{\pi}{2W_n}, n \in \mathbb{N} \right\}$, donc elle est bornée, donc il existe $M > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \mu_{\sigma(n)} \leq M$. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, \mu_n \geq M$ et comme $\sigma(n_0) \geq n_0$, alors on aura pour tout $\forall n \geq n_0, \mu_{\sigma(n)} \geq M$ car $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$

est strictement croissante. Donc nécessairement $(\mu_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire et sa limite est donc dans le spectre. Ainsi $\text{sp}(v)$ est une partie fermée de \mathbb{C} .

