**I.A.1)** $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(U+\lambda V)^2 = U^2 + 2\lambda UV + \lambda^2 V^2 \geqslant 0$ possède un moment d'ordre 2 (car $0 \leqslant |UV| \leqslant U^2 + V^2$).

On en déduit par linéarité et positivité de l'espérance que :

$P(\lambda) = E(U^2) + 2\lambda E(UV) + \lambda^2 E(V^2) \geqslant 0$ est un polynôme positif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme $V$ n'est pas presque surement nulle, $E(V^2) \neq 0$ et donc $P$ est un polynôme du second degré positif sur $\mathbb{R}$. Son discriminant est donc négatif, ce qui donne : $4E(UV)^2 - 4E(U^2)E(V^2) \leqslant 0$ d'où on conclut :

Conclusion: $\boxed{E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 \geqslant 0}$

L'égalité équivaut à la nullité du discriminant du polynôme $P$ donc si et seulement s'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = E((U+\lambda V)^2) = 0$ : soit $(U+\lambda V)^2$ presque surement nulle et donc $U + \lambda V$ presque surement nulle.

Conclusion:

$\boxed{E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 = 0 \text{ si et seulement si } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } U+\lambda V \text{ presque surement nulle.}}$

**I.A.2) a)** Si $X$ est bornée , $e^{\tau|X|}$ l'est aussi et donc admet une espérance finie d'où :

Conclusion: $\boxed{\forall \tau > 0,\ X \text{ vérifie } (C_\tau)}$

**I.A.2) b)** D'après la formule de transfert, $e^{tX}$ admet une espérance finie si et seulement si la série $\left(\sum e^{tk}\mathbf{P}(X=k)\right)$ est absolument convergente.

Comme $e^{tk}\mathbf{P}(X=k) = e^{tk}p(1-p)^{k-1} = \dfrac{p}{1-p}(e^t(1-p))^k$, la série géométrique $\left(\sum e^{tk}\mathbf{P}(X=k)\right)$ est convergente si et seulement si $|e^t(1-p)| < 1$ soit $t < \ln(\dfrac{1}{1-p}) = -\ln(1-p)$.

Dans ces cas, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk}\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p}{1-p}(e^t(1-p))^k = \frac{p}{1-p}\frac{e^t(1-p)}{1-e^t(1-p)}$.

Conclusion: $\boxed{E(e^{tX}) < +\infty \text{ si et seulement si } t < -\ln(1-p) \text{ et dans ce cas } E(e^{tX}) = \dfrac{pe^t}{1-e^t(1-p)}}$

**I.A.2) c)** On fait comme au b) :

$e^{tk}\mathbf{P}(X=k) = e^{tk}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\dfrac{(e^t\lambda)^k}{k!}$ est le terme d'une série exponentielle convergente d'où :

Conclusion: $\boxed{E(e^{tX}) < +\infty \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et l'on a } E(e^{tX}) = e^{-\lambda}e^{e^t\lambda}}$

**I.A.3) a)**

$\forall t \in [a,b]$, $\forall \omega \in \Omega$ : $a \leqslant t \leqslant b$ donc $aX(\omega) \leqslant tX(\omega) \leqslant bX(\omega)$ ou $bX(\omega) \leqslant tX(\omega) \leqslant aX(\omega)$, donc par croissance de l'exponentielle , on a : $e^{aX(\omega)} \leqslant e^{tX(\omega)} \leqslant e^{bX(\omega)}$ ou $e^{bX(\omega)} \leqslant e^{tX(\omega)} \leqslant e^{aX(\omega)}$.

On en déduit que $e^{tX(\omega)} \leqslant \max(e^{aX(\omega)}, e^{bX(\omega)}) \leqslant e^{aX(\omega)} + e^{bX(\omega)}$.

En conséquence, on a $\underline{0 \leqslant e^{tX} \leqslant e^{aX} + e^{bX}}$ et l'on conclut avec la propriété $(\mathcal{P})$ :

Conclusion: $\boxed{\forall t \in [a,b]\ ,\ E(e^{tX}) < +\infty}$

L'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } E(e^{tX}) < +\infty\}$ est **convexe** et donc c'est un **intervalle**.

**I.A.3) b)** $\forall y \in \mathbb{R}$ : $\theta_{k,t,a,b}(y)$ existe (dénominateur strictement positif) et l'on a :
$\theta_{k,t,a,b}(y) = \dfrac{y^k e^{ty}}{e^{ay}(1+e^{(b-a)y})} = \dfrac{y^k e^{(t-a)y}}{1+e^{(b-a)y}}$. Comme $t-a>0$ et $b-a>0$, on en déduit que $\lim\limits_{y\to-\infty} \theta_{k,t,a,b}(y) = \dfrac{0}{1+0} = 0$ par théorèmes généraux et croissances comparées.

On fait de même en $+\infty$, en mettant en facteur au dénominateur $e^{by}$ d'où : $\lim\limits_{y\to+\infty} \theta_{k,t,a,b}(y) = 0$.

On en déduit l'existence d'un réel $A > 0$ tel que

$\forall y > A$, $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant 1$ et $\forall y < -A$, $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant 1$.

Sur le segment $[-A,A]$, la fonction $\theta_{k,t,a,b}$ est continue (par théorèmes généraux) et donc par le théorème des bornes atteintes, il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall y \in [-A,A]\ ,\ |\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant M$.

En conséquence $\forall y \in \mathbb{R}\ ,\ |\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant \max(M,1)$ et l'on peut conclure :

Conclusion: $\boxed{\theta_{k,t,a,b} \text{ est bornée sur } \mathbb{R} \text{ et } \lim\limits_{y\to\pm\infty} \theta_{k,t,a,b}(y) = 0}$

**I.A.3) c)** Avec les notations de la question ci-dessus, notons $M_0 = \max(M,1)$.

On a donc $0 \leqslant |X^k|e^{tX} \leqslant M_0(e^{aX} + e^{bX})$.

On conclut encore une fois avec la propriété $(\mathcal{P})$ :

Conclusion: $\boxed{\forall t \in ]a,b[\ ,\ E(|X^k|e^{tX}) < +\infty}$

**I.A.3) d)** $\forall t \in [c,d]$, on a : $0 \leqslant |y^k|e^{ty} \leqslant |y^k|(e^{cy} + e^{dy})$, donc :
$\forall t \in [c,d]$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant \dfrac{|y^k|(e^{cy}+e^{dy})}{(e^{ay}+e^{by})} = |\theta_{k,c,a,b}(y)| + |\theta_{k,d,a,b}(y)|$.

Comme les deux fonctions $\theta_{k,c,a,b}$ et $\theta_{k,d,a,b}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ (car $a<c<b$ et $a<d<b$), on conclut :

Conclusion: $\boxed{\text{Il existe } M_{k,a,b,c,d} \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall t \in [c,d],\ \forall y \in \mathbb{R},\ |\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant M_{k,a,b,c,d}}$

**I.A.4) a)** On a montrer au **I.A.3) a)** que $I = \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } E(e^{tX}) < +\infty\}$ est un intervalle , de plus comme $X$ vérifie $C_r$, $\forall t \in [-\tau,\tau]$ : $0 \leqslant e^{tX} \leqslant e^{|t|\cdot|X|} \leqslant e^{\tau|X|}$ et avec $(\mathcal{P})$, $t \in I$

Conclusion: $\boxed{I = \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } E(e^{tX}) < +\infty\} \text{ est un intervalle et contient } [-\tau,\tau]}$

**I.A.4) b)** Si l'on pose $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on a
$\forall t \in I\ ,\ \varphi_X(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{tx_k}\mathbf{P}(X = x_k)$ (formule de transfert). Par théorèmes généraux (somme finie), d'où :

Conclusion: $\boxed{\varphi_X \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I = \mathbb{R}}$

**I.A.4) c)** $\forall t \in I\ ,\ \varphi_X(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n e^{tx_n}$ (formule de transfert).

Posons pour tout entier $n$ : $u_n(t) = p_n e^{tx_n}$.

**i)** Par théorèmes généraux, $u_n$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $I$ et de classe $C^\infty$ sur l'intérieur de $I$ et $\forall t \in \mathring{I}$ , $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , $u_n^{(k)}(t) = p_n x_n^k e^{tx_n}$.

**ii)** La série $(\sum u_n)$ converge simplement sur $I$ car $\forall t \in I$ $E(e^{tX}) < +\infty$, donc par théorème de transfert, $(\sum u_n(t))$ converge absolument.

**iii)** $\forall t \in [a,b] \in I$ , $|u_n(t)| = p_n e^{tx_n} \leqslant p_n(e^{ax_n} + e^{bx_n}) = \alpha_n$ et $(\sum \alpha_n)$ converge et de somme $E(e^{aX}) + E(e^{bX})$. On en déduit la convergence normale de $(\sum u_n)$ sur $[a,b]$ et donc la continuité de $\varphi_X$ sur $I$.

**iii)** $\forall t \in [c,d] \in \mathring{I}$ , il existe $(a,b) \in I^2$ tels que $a < c < d < b$ , $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,

$|u_n^{(k)}(t)| = p_n |x_n^k| e^{tx_n} \leqslant M_{k,a,b,c,d}(e^{ax_n} + e^{bx_n}) = \beta_n$ et $(\sum \beta_n)$ converge et de somme $M_{k,a,b,c,d}(E(e^{aX}) + E(e^{bX}))$. On en déduit la convergence normale de $(\sum u_n^{(k)})$ sur $[c,d]$.

On en déduit que $\varphi_X$ est $C^\infty$sur $\mathring{I}$. On conclut avec le théorème de dérivation des séries de fonctions :

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\varphi_X \text{ est continue sur } I \text{ et } C^\infty \text{sur } \mathring{I}.}$

**I.A.4) d)** Avec le théorème de dérivation des séries de fonctions, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in \mathring{I}$ :
$\varphi_X^{(k)}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^k p_n e^{tx_n} = E(X^k e^{tX})$ (formule de transfert).

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \text{ et } \forall t \in \mathring{I} : \varphi_X^{(k)}(t) = E(X^k e^{tX})}$

**I.A.4) e)** (Erreur d'énoncé $\psi_X$ n'est définie que sur $\mathring{I}$ et non sur $I$)

Comme $\varphi_X(t) > 0$ pour tout $t \in I$, comme quotient, la fonction $\psi_X$ est de classe $C^\infty$sur $\mathring{I}$.

On a $\forall t \in \mathring{I} : \psi'_X(t) = \dfrac{\varphi''_X(t)\varphi_X(t) - \varphi'_X(t)\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)^2} = \dfrac{E(X^2e^{tX})E(e^{tX}) - E(Xe^{tX})^2}{\varphi_X(t)^2}$.

Si on pose $U = Xe^{tX/2}$ et $V = e^{tX/2}$, alors $\psi'_X(t) = \dfrac{E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2}{\varphi_X(t)^2} \geqslant 0$ avec le **I.A.1)** et comme $V$ n'est pas presque surement nulle, $\psi'_X(t) = 0$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda V + U = 0$ presque surement et donc $X = -\lambda$ presque surement.

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\psi_X \text{ est croissante sur } \mathring{I} \text{ et strictement croissante sur } \mathring{I} \text{ si } X \text{ n'est pas constant p.s.}}$

**I.B.1)**

$\mathbf{P}(|S_n - nE(X)| \geqslant n\delta) = \mathbf{P}\left(|\dfrac{S_n}{n} - E(X)| \geqslant \delta\right)$, or $E(\dfrac{S_n}{n}) = E(X)$ (par linéarité de l'espérance) et comme $X$ admet un moment d'ordre 2, $\frac{S_n}{n}$ aussi et par indépendance des $X_i$, $V(\dfrac{S_n}{n}) = \dfrac{1}{n^2}(V(X_1) + \cdots + V(X_n)) = \dfrac{V(X)}{n}$.

Il ne reste plus qu'à appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev pour conclure :

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\mathbf{P}(|S_n - nE(X)| \geqslant n\delta) \leqslant \dfrac{V(X)}{n\delta^2}}$

**I.B.2)** D'abord, on a $1 \geqslant \mathbf{P}(|S_n - nE(X)| < n\delta) = 1 - \mathbf{P}(|S_n - nE(X)| \geqslant n\delta) \geqslant 1 - \dfrac{V(X)}{n\delta^2}$, donc par théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|S_n - nE(X)| < n\delta) = 1$.

Ensuite $|S_n - nE(X)| < n\delta \iff nE(X) - n\delta < S_n < nE(X) + n\delta$.

On souhaiterais avoir $nE(X) + n\delta \leqslant nv$ et $nE(X) - n\delta \geqslant nu$, ce qui est possible si

$0 < \delta \leqslant v - E(X)$ et $0 < \delta \leqslant E(X) - u$.

Prenons donc $\delta = \min(E(X) - u, v - E(x)) > 0$, on a alors :

$|S_n - nE(X)| < n\delta \Longrightarrow nu \leqslant S_n \leqslant nv$ et donc $(|S_n - nE(X)| < n\delta) \subset (nu \leqslant S_n \leqslant nv)$

On en déduit que $\mathbf{P}(|S_n - nE(X)| < n\delta) \leqslant \mathbf{P}(nu \leqslant S_n \leqslant nv) \leqslant 1$ et l'on conclut par théorème d'encadrement :

Conclusion: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \pi_n = 1}$

**I.C.1)** On a $u_n = u_{mq+r} \geqslant u_{mq} + u_r$ et par récurrence sur $q$, $u_{mq} \geqslant qu_m$

Conclusion1 : $\boxed{u_n \geqslant qu_m + u_r}$

$u_n \geqslant qu_m + u_r \Longrightarrow u_n - ns \geqslant qu_m + u_r - ns = qu_m + u_r - qms - rs = q(u_m - ms) + u_r - rs$

Conclusion2 : $\boxed{u_n - ns \geqslant q(u_m - ms) + u_r - rs}$

**I.C.2)** On en déduit que $\forall n = mq_n + r_n > 0$ , $\dfrac{u_n}{n} - s \geqslant \dfrac{q_n}{n}(u_m - ms) + \dfrac{u_{r_n} - r_n s}{n}$ donc on a $\dfrac{u_n}{n} \geqslant \dfrac{q_n}{n}u_m + s - \dfrac{q_n}{n}ms + \dfrac{u_{r_n} - r_n s}{n}$

Or on a $\dfrac{q_n}{n} = \dfrac{q_n}{mq_n + r_n} = \dfrac{1}{m + \frac{r_n}{q_n}}$ et pour $n > m(> r_n)$, on a $q_n = \dfrac{n - r_n}{m}$ donc $\dfrac{q_n}{n} = \dfrac{1}{m + \frac{r_n m}{n - r_n}}$.

Comme $(r_n)$ est bornée (par 0 et $m$), que $m$ est fixé, on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{q_n}{n} = \dfrac{1}{m}$ et donc comme $(u_{r_n} - r_n s)$ est aussi bornée (ne prend qu'un nombre fini de valeurs), on en déduit que :

$\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{q_n}{n}u_m + s - \dfrac{q_n}{n}ms + \dfrac{u_{r_n} - r_n s}{n}\right) = \dfrac{u_m}{m} + s - s + 0 = \dfrac{u_m}{m}$.

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N > r$ tel que $\forall n > N$ : $\dfrac{q_n}{n}u_m + s - \dfrac{q_n}{n}ms + \dfrac{u_{r_n} - r_n s}{n} \geqslant \dfrac{u_m}{m} - \varepsilon$.

On peut donc conclure :

Conclusion: $\boxed{\text{il existe } N > r \text{ tel que } \forall n > N : \dfrac{u_n}{n} \geqslant \dfrac{u_m}{m} - \varepsilon.}$

**I.C.3)** Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $s = \sup\left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{u_{m_0}}{m_0} \geqslant s - \varepsilon/2$. Pour ce $m_0$ avec la question ci-dessus, il existe $N > m_0$ tel que $\forall n > N$ : $\dfrac{u_n}{n} \geqslant \dfrac{u_{m_0}}{m_0} - \varepsilon/2 \geqslant s - \varepsilon$, comme on a $\forall n > N$ : $\dfrac{u_n}{n} \leqslant s$, on a donc $\forall n > N$ : $s - \varepsilon \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant s$, on conclut :

Conclusion: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = s}$

**II.A.1)** Si tout les $X_i$ sont supérieurs à $a$ alors $S_n$ est supérieur à $na$. Précisons :

$(X_1 \geqslant a) \cap \cdots \cap (X_n \geqslant a) \subset (S_n \geqslant na)$, donc $\mathbf{P}((X_1 \geqslant a) \cap \cdots \cap (X_n \geqslant a)) \leqslant \mathbf{P}(S_n \geqslant na)$, et par indépendance mutuelle des $X_i \sim X$, on a donc $\mathbf{P}(X_1 \geqslant a)^n \leqslant \mathbf{P}(S_n \geqslant na)$.

En conséquence si $\mathbf{P}(S_n \geqslant na) = 0$ alors $\mathbf{P}(X_1 \geqslant a)^n = 0$ et donc $\mathbf{P}(X_1 \geqslant a) = 0$

Réciproquement on a : $(S_n \geqslant na) \subset (X_1 \geqslant a) \cup \cdots \cup (X_n \geqslant a)$, d'où (par inégalité de Boole)

$\mathbf{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \mathbf{P}((X_1 \geqslant a) \cup \cdots \cup (X_n \geqslant a)) \leqslant \mathbf{P}(X_1 \geqslant a) + \cdots + \mathbf{P}(X_n \geqslant a) = n\mathbf{P}(X \geqslant a)$ .

En conséquence si $\mathbf{P}(X_1 \geqslant a) = 0$ alors $\mathbf{P}(S_n \geqslant na) = 0$.

Conclusion: $\boxed{\mathbf{P}(X_1 \geqslant a) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{P}(S_n \geqslant na) = 0}$

**II.A.2) a)** Posons $X(\Omega) = \{x_n\ ,\ n \in J \subset \mathbb{N}\}$ et $Y = \{x_1 + \cdots + x_n\ ,\ (x_1, \ldots, x_n) \in X(\Omega)^n\}$.

On a $Y$ qui est dénombrable car $X(\Omega)^n$ est dénombrable. $\forall y \in Y$ :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(S_{m+n} - S_m = y) = \mathbf{P}(X_{m+1} + \cdots + X_{m+n} = y)\\
&= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X(\Omega)^n, x1+\cdots+x_n=y} \mathbf{P}(X_{m+1} = x_1, X_{m+2} = x_2, \ldots, X_{m+n-1} = x_{n-1}, X_{m+n} = x_n)\\
&= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X(\Omega)^n, x_1+\cdots+x_n=y} \mathbf{P}(X_{m+1} = x_1) \cdots \mathbf{P}(X_{m+n} = x_n) \text{ (avec l'indépendance)}\\
&= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X(\Omega)^n, x_1+\cdots+x_n=y} \mathbf{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbf{P}(X_n = x_n)\\
&= \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n = y)
\end{aligned}$$

Conclusion: $\boxed{S_{m+n} - S_m \text{ et } S_n \text{ ont la même loi}}$

**II.A.2) b)**

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(S_n \geqslant nb)\,\mathbf{P}(S_m \geqslant mb) = \mathbf{P}(S_{m+n} - S_m \geqslant nb)\,\mathbf{P}(S_n \geqslant nb)\\
&= \mathbf{P}\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant nb\right)\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{m} X_k \geqslant mb\right)
\end{aligned}$$

Par le lemme des coalitions, $\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\sum_{k=1}^{m} X_k$ sont indépendantes, donc

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant nb)\,\mathbf{P}(S_m \geqslant mb) = \mathbf{P}\left(\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant nb\right) \cap \left(\sum_{k=1}^{m} X_k \geqslant mb\right)\right)$$

Comme $\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant nb\right) \cap \left(\sum_{k=1}^{m} X_k \geqslant mb\right) \subset \left(\sum_{k=1}^{m+n} X_k \geqslant nb + mb\right)$, on peut conclure :

Conclusion: $\boxed{\mathbf{P}(S_n \geqslant nb)\,\mathbf{P}(S_m \geqslant mb) \leqslant \mathbf{P}(S_{n+m} \geqslant (n+m)b)}$

**II.A.3)** D'après le II.A.1) et l'hypothèse, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $\mathbf{P}(S_n \geqslant na) > 0$ et donc son logarithme est bien définie et donc la suite aussi.

Comme $\gamma_a = \sup\left\{\frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, avec $u_n = \mathbf{P}(S_n \geqslant nb)$ qui est sur-additive (II.A.2), existe et $\gamma_a \leqslant \ln 1 = 0$ , on conclut avec le **I.C.3)** et le **II.A.2)b)** que

$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{\ln(\mathbf{P}(S_n \geqslant na))}{n}\right) \text{ converge vers } \gamma_a \leqslant 0}$,

enfin par croissance de l'exponentielle et par définition de la borne supérieure, on a

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \mathbf{P}(S_n \geqslant na) \leqslant e^{n\gamma_a}}$.

**II.B.1)** $e^{tS_n} = e^{tX_1} \cdots e^{tX_n}$ et par lemme des coalitions $e^{tX_1}, \ldots, e^{tX_n}$ sont indépendantes et admettent une espérance finie car $t \in I$ donc $E(e^{tS_n}) = E(e^{tX})^n = \varphi_X(t)^n$.

**Premier cas** : $t > 0$

Pour l'inégalité, utilisons Markov : $(S_n \geqslant na) = (e^{tS_n} \geqslant e^{nta})$ car $t > 0$ et l'exponentielle croissante d'où $\mathbf{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \dfrac{E(e^{tS_n})}{e^{nta}} = \dfrac{\varphi_X(t)^n}{e^{nta}}$.

**Deuxième cas** : $t = 0$

L'inégalité est triviale car $\dfrac{\varphi_X(t)^n}{e^{nta}} = 1/1 = 1$, on peut donc conclure

Conclusion: $\boxed{\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+ \ , \ E(e^{tS_n}) = \varphi_X(t)^n \text{ et } \mathbf{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \dfrac{\varphi_X(t)^n}{e^{nta}}}$

**II.B.2) a)**

Passons au logarithme dans l'inégalité précédente (tout est strictement positif) :

$\ln\Big(\mathbf{P}(S_n \geqslant na)\Big) \leqslant n\ln(\varphi_X(t)) - nta$, d'où pour $n = 1$, $\ln\Big(\mathbf{P}(S_1 \geqslant a)\Big) \leqslant \ln(\varphi_X(t)) - ta = \chi(t)$ et comme $S_1 = X$,

Conclusion: $\boxed{\chi \text{ est minorée par } \ln\Big(\mathbf{P}(X \geqslant a)\Big)}$

**II.B.2) b)** La fonction $\varphi_X$ est dérivable en 0 car $0 \in \mathring{I}$ et $\varphi_X'(0) = E(X^0 e^{0X}$ (grâce au I.A.4d))

On en déduit en 0 que $\chi(t) = \ln(\varphi_X(0) + \varphi_X'(0)t + o(t)) - a + o(t) = (E(X) - a)t + o(t)$. Comme $a > E(X)$, on a $E(X) - a < 0$ et donc $\chi(t) \sim_0 (E(X) - a)t$

On en déduit que localement en 0 $\chi(t)$ est du signe $(E(X) - a)t$ qui est strictement négatif en $0^+$. On peut conclure :

Conclusion: $\boxed{\chi(t) \sim_0 (E(X) - a)t \text{ et } \eta_a < 0}$

**II.B.2) c)** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+$ , $\ln\Big(\mathbf{P}(S_n \geqslant na)\Big) \leqslant n\ln(\chi(t))$ , donc $\dfrac{\ln\Big(\mathbf{P}(S_n \geqslant na)\Big)}{n}$ minore $\chi$ sur $\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+$ et par propriété de la borne inférieure (plus grand des minorants), on a : $\dfrac{\ln\Big(\mathbf{P}(S_n \geqslant na)\Big)}{n} \leqslant \eta_a$, enfin on multiplie par $n$ et l'on passe à l'exponentielle :

Conclusion: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(S_n \geqslant na) \leqslant e^{n\eta_a}}$

Enfin $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln\Big(\mathbf{P}(S_n \geqslant na)\Big)}{n} \leqslant \eta_a$ prouve aussi que $\eta_a$ est un majorant de $\left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ (toujours avec $u_n = \mathbf{P}(S_n \geqslant nb)$) et donc $\gamma_a \leqslant \eta_a < 0$

Conclusion: $\boxed{\gamma_a < 0}$

**II.B.2) d) i.** Comme $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbf{P}(X \geqslant a) > 0$ si et seulement si $a \leqslant 1$. Comme $E(X) = p$, on conclut :

Conclusion: $\boxed{\text{l'ensemble des } a \text{ qui conviennent est l'intervalle } ]p, 1]}$

Ensuite $\varphi_X(t) = pe^t + 1 - p$, donc $\chi(t) = \ln(pe^t + 1 - p) - at$, d'où $\chi'(t) = \dfrac{pe^t}{pe^t + 1 - p} - a$, $\chi'(t) = 0$ ssi $t = \ln\Big(\dfrac{a(1-p)}{p(1-a)}\Big) = c$ et $\chi$ est décroissante sur $[0, c]$ puis croissante sur $[c, +\infty[$.

On en déduit que $\eta_a = \chi(c) = \left(\dfrac{1-p}{1-a}\right) - a\ln\left(\dfrac{a(1-p)}{p(1-a)}\right)$

Conclusion: $\boxed{\eta_a = \ln\left(\dfrac{1-p}{1-a}\right) - a\ln\left(\dfrac{a(1-p)}{p(1-a)}\right)}$

**II.B.2) d) ii.** Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $\mathbf{P}\left(X \geqslant a\right) > 0$ et $E(X) = \lambda$, on conclut :

Conclusion: $\boxed{\text{l'ensemble des } a \text{ qui conviennent est l'intervalle } ]\lambda, +\infty[}$

Ensuite $\varphi_X(t) = E(e^{tX}) = e^{-\lambda}e^{e^t\lambda}$ (I.A.3a) donc $\chi(t) = \lambda(e^t - 1) - ta$ , $\chi'(t) = \lambda e^t - a$, on obtient comme au i) :

Conclusion: $\boxed{\eta_a = a - \lambda - a\ln(\dfrac{a}{\lambda})}$

**II.C.1) a)**

Par la formule de transfert $E(e^{tX})$ et , il vient immédiatement :

Conclusion: $\boxed{\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \frac{e^{tX}}{E(e^{tX})}\mathbf{P}\left(X = x\right) = 1}$

**II.C.1) b)**

Étudions la série $(\sum x\mathbf{P}\left(X' = x\right))$ : $x\mathbf{P}\left(X' = x\right) = x\dfrac{e^{tX}}{E(e^{tX})}\mathbf{P}\left(X = x\right)$ et cette famille est sommable de somme $\dfrac{E(Xe^{tX})}{E(e^{tX})}$, on conclut avec I.A.4d)

Conclusion: $\boxed{E(X') = \dfrac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)}}$

Avec le I.A.4e) cette fonction de $t$ est strictement croissante sur $I$.

D'autre part $\chi'(t) = \dfrac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)} - a$ et comme $\chi$ présente un extremum en $\sigma$ intérieur à $I \cap \mathbb{R}^+$, on a $\chi'(\sigma) = 0$, soit $\dfrac{\varphi_X'(\sigma)}{\varphi_X(\sigma)} = a$, enfin comme $t > \sigma$ , $\dfrac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)} > \dfrac{\varphi_X'(\sigma)}{\varphi_X(\sigma)}$ d'où on conclut :

Conclusion: $\boxed{E(X') > a}$

**II.C.2) a)** $f(X_1', \ldots, X_n') = \mathbb{1}_A$ où $A = (na \leqslant X_1' + \cdots + X_n' \leqslant nb)$. On en déduit que $E(f(X_1', \ldots, X_n')) = E(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}\left(A\right) = \mathbf{P}\left(na \leqslant S_n' \leqslant nb\right) = \dfrac{E(f(X_1, \ldots, X_n)e^{tS_n})}{\varphi_X(t)^n}$

D'autre part, $f(X_1, \ldots, X_n)e^{tS_n} = \mathbb{1}_B$ où $B = (na \leqslant X_1 + \cdots + X_n = S_n \leqslant nb) = C \cap D$ avec $(na \leqslant S_n)$ et $D = (S_n \leqslant nb)$, comme $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_C \cdot \mathbb{1}_D$ et que $\mathbb{1}_D e^{tS_n} = \mathbb{1}_{(S_n \leqslant nb)}e^{ntb} \leqslant e^{ntb}$ (on a égalité si $S_n(\omega) \leqslant nb$ et sinon on a $0 \leqslant e^{ntb}$).

On a donc $f(X_1, \ldots, X_n)e^{tS_n} \leqslant \mathbb{1}_{(S_n \geqslant na)}e^{ntb}$ et par croissance , linéarité et espérance d'une fonction indicatrice : $E(f(X_1, \ldots, X_n)e^{tS_n}) \leqslant \mathbf{P}\left(S_n \geqslant na\right)e^{ntb}$, on conclut :

Conclusion: $\boxed{\mathbf{P}\left(na \leqslant S_n' \leqslant nb\right) \leqslant \mathbf{P}\left(S_n \geqslant na\right)\dfrac{e^{ntb}}{\varphi_X(t)^n}}$

**II.C.2) b)** Le I.B.2, donne $\pi_n' = \mathbf{P}\left(na \leqslant S_n' \leqslant nb\right)$ tend vers 1 à l'infini car $a < E(X') < b$.

De l'inégalité de la question précédente, on en déduit que

$\ln(\pi_n') \leqslant \ln(\mathbf{P}\left(S_n \geqslant na\right)) + ntb - n\ln(\varphi_X(t))$, ensuite on divise par $n$ et l'on fait tendre $n$ vers l'infini d'où on obtient : $0 \leqslant \gamma_a + tb - \ln(\varphi_X(t))$.

On a donc $0 \leqslant \gamma_a + tb - \chi(t) + ta$ d'où $\eta_a \leqslant \chi(t) \leqslant \gamma_a + t(b-a)$

Donc $\eta_a \leqslant \gamma_a + t(b-a)$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $a = \dfrac{\varphi'_X(\sigma)}{\varphi_X(\sigma)}$, par continuité de $\dfrac{\varphi'_X}{\varphi_X}$, on peut donc choisir $t > \sigma$ tel que $|\dfrac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)} - \dfrac{\varphi'_X(\sigma)}{\varphi_X(\sigma)}| \leqslant \varepsilon$, en prenant $b = \dfrac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)} + \varepsilon$, ona bien $b > \dfrac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)}$ et $0 < b - a < 2\varepsilon$. On a donc $\eta_a \leqslant \gamma_a + t(b-a) \leqslant \gamma_a + 2t\varepsilon$, quitte à prendre un $t$ plus petit, on peut supposer que $t \leqslant \sigma + 1$, donc $\eta_a \leqslant \gamma_a + t(b-a) \leqslant \gamma_a + 2(\sigma+1)\varepsilon$. En faisant tendre $\varepsilon$ vers 0, on obtient $\eta_a \leqslant \gamma_a$.

Avec le IIB2c, on avait $\gamma_a \leqslant \eta_a$. On peut donc conclure que

Conclusion: $\boxed{\gamma_a = \eta_a}$

**II.C.3) a)** L'idée avec le coefficient binomial est de sommer des Bernoulli. Considérons des variables indépendantes $X_n$ suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Dans ce cas on a $X_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$.

On a alors $U_n = \sum\limits_{k \in A_n} 2^n \mathbf{P}\left(S_n = k\right) = 2^n \mathbf{P}\left(S_n \in A_n\right)$

Or $(S_n \in A_n) = \Big(S_n \geqslant (\dfrac{1}{2} + \alpha)n\Big) \cup \Big(S_n \leqslant (\dfrac{1}{2} - \alpha)n\Big)$ (réunion disjointe)

D'autre part $k \leqslant (\dfrac{1}{2} - \alpha)n$ si et seulement si $n - k \geqslant (\dfrac{1}{2} + \alpha)n$.

On en déduit (comme $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$) que

$U_n = 2^n \mathbf{P}\Big(S_n \geqslant (\dfrac{1}{2} + \alpha)n\Big)/2 = 2^{n-1}\mathbf{P}\Big(S_n \geqslant (\dfrac{1}{2} + \alpha)n\Big)$.

On a donc $\dfrac{1}{n}\ln U_n = \dfrac{n-1}{n}\ln 2 + \dfrac{1}{n}\ln\left(\mathbf{P}\Big(S_n \geqslant (\dfrac{1}{2} + \alpha)n\Big)\right)$

Avec le II.B.2d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln U_n = \ln 2 + \left(\dfrac{1-p}{1-a}\right) - a\ln\left(\dfrac{a(1-p)}{p(1-a)}\right)$ avec $p = \dfrac{1}{2}$ et $a = \alpha + \dfrac{1}{2}$.

Conclusion: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{(1/2-\alpha)^{1/2-\alpha}(\alpha+1/2)^{\alpha+1/2}}}$

**II.C.3) b)**

On redémontre (le faire !) que la somme de deux loi de Poisson indépendante est une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètre. On considère donc une suite $(X_n)$ indépendantes qui suivent toutes une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

Comme au a) on a $e^{-n\lambda}T_n = \mathbf{P}\left(S_n \geqslant \alpha n\right)$ avec $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln T_n = a - a\ln(\dfrac{a}{\lambda})$ avec $a = \alpha$ d'où

Conclusion: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} T_n^{\frac{1}{n}} = e^{\alpha}(\dfrac{\lambda}{\alpha})^{\alpha}}$