

Concours Communs Polytechniques - Session 2011

Corrigé de l'épreuve d'algèbre- Filière MP

Commutant d'une matrice, inégalités sur les déterminants de matrices symétriques

Corrigé par M.TARQI <http://alkendy.x10.mx>

Exercice

Commutant d'une matrice

1. Il suffit de montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en effet, $C(A)$ est non vide puisqu'il contient A et si M et N sont dans $C(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = MA + \lambda NA = (M + \lambda N)A,$$

et donc $M + \lambda N$ est dans $C(A)$.

2. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x) = -(x-3)(x-2)^2$, donc on peut trigonaliser la matrice A . Cherchons d'abord les sous-espaces propres associés à 3 et 2. Après calculs on trouve $E_3 = \text{Vect}(1, 1, 1) = \text{Vect}(v_1)$ et $E_2 = \text{Vect}(4, 3, 4) = \text{Vect}(v_2)$. On choisit alors un vecteur v_3 quelconque vérifiant les conditions suivantes : les vecteurs (v_1, v_2, v_3) sont linéairement indépendants et $Av_3 - 2v_3 = v_2$.

Posons $v_3 = (x, y, z)$, alors :

$$Av_3 - 2v_3 = v_2 \iff \begin{cases} -x + 4y - 2z = 4 \\ 4y - 3z = 3 \end{cases}$$

Choisissons, par exemple, $v_3 = (-2, 0, -1)$.

La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est bien libre et si $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ (la matrice de passage de la base

canonique à la base (v_1, v_2, v_3)) alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T$.

3. $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \in C(T)$ si et seulement si $AM = MA$ ou encore

$$\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2a' + c'' & 2b' + b'' & 3c' + c'' \\ 2a'' & 2b'' & 2c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 2b & b + 2c \\ 3a' & 2b' & b' + 2c' \\ 3a'' & 2b'' & b'' + 2c'' \end{pmatrix}$$

donc

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c'' & c' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c'' \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $M \in \text{Vect}(J, K, L)$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Réciproquement, les matrices J, K, L sont linéairement indépendantes et sont dans $C(T)$, donc $C(T) = \text{Vect}(J, K, L)$ et par suite $\dim C(A) = 3$.

4. (a) Il est clair que l'application est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $P^{-1}MP = 0$ si et seulement si $M = 0$, donc l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. L'image de $C(A)$ n'est autre que $C(T)$ et par suite $\dim C(A) = \dim C(T) = 3$.
- (b) Non, si oui, la matrice A serait diagonalisable.
- (c) Il est clair que $\text{Vect}(I, A, A^2) \subset C(A)$ et toute relation de la forme $aI + bA + cA^2 = 0$ entraîne $a = b = c = 0$ (d'après 5.(b)), donc la famille $\{I, A, A^2\}$ est libre et comme $\dim C(A) = 3$, alors $C(A) = \text{Vect}(I, A, A^2)$.
- (d) Il est clair que tout polynôme en A est dans $C(A)$. Inversement soit $M = P(A)$ un polynôme en A et soit R le reste de la division euclidienne de P par χ_A , d'après le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0$ et donc $M = R(A)$, avec $\deg R \leq 2$, ainsi

$$C(A) = \{P(A)/P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Le résultat n'est vrai en général, il suffit considérer une matrice nilpotente d'indice 2.

Problème

INÉGALITÉS SUR LES DÉTERMINANTS DE MATRICES SYMÉTRIQUES

1. *Question préliminaire* S étant symétrique réelle, donc elle est orthogonalement diagonalisable. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A , puisque $X \neq 0$, ${}^tXX > 0$, d'où :

$${}^tXAX = \lambda {}^tXX$$

ou encore

$$\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geq 0.$$

Inversement si les valeurs propres de A sont positives, alors, dans une base de diagonalisation de A :

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0,$$

où les x_i désignent les composantes de X dans cette base.

PARTI I

2. Soit $S \in S_n^+$ et soit $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ l'ensemble des valeurs propres de A , d'après 1. $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et donc

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}},$$

inégalité qui s'écrit encore sous la forme

$$\sqrt[n]{\det S} \leq \frac{1}{n} \text{trace} S.$$

3. (a) Il est clair que ${}^t(tMM) = {}^tMM$ et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$${}^tX {}^tMMX = {}^t(MX)(MX) \geq 0,$$

donc ${}^tMM \in S_n^+$.

- (b) Posons ${}^tMM = (c_{ij})$. On a $c_{ii} = \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{ki} = \sum_{k=1}^n m_{ki}^2$, donc

$$\text{trace}({}^tMM) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ki}^2.$$

L'inégalité de la question 2. appliquée à tMM entraîne $\sqrt[n]{\det({}^tMM)} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ki}^2$ et comme $\det({}^tM) = \det M$, alors

$$(\det M)^2 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ki}^2\right)^n.$$

PARTIE II : THÉORÈME DE RÉDUCTION SIMULTANÉE

4. (a) La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est I_n puisque $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E et dans la base canonique est $\mathcal{B}$, donc d'après la formule de changements de bases, on a $I_n = {}^tRAR$.
- (b) C étant symétrique réelle, donc elle est orthogonalement diagonalisable, c'est-à-dire il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Q telles que $C = QDQ^{-1} = QD^tQ$ ou encore $D = {}^tQ C Q$.
- (c) La relation $C = {}^tRBR$ est équivalent encore à

$$B = ({}^tR)^{-1}CR^{-1} = {}^t(R^{-1})CR^{-1} = {}^t(RQ)^{-1}D(RQ)^{-1}$$

et la relation $I_n = {}^tRAR$ est équivalent à

$$A = {}^t(R^{-1})R^{-1} = {}^t(RQ)^{-1}(RQ)^{-1},$$

il suffit donc de prendre $P = (RQ)^{-1}$.

- (d) La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie ${}^tPBP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cependant la matrice P n'est pas orthogonale.
5. (a) Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \subset \mathbb{R}^+$. On a $A + B = {}^tP(I_n + D)P$ et donc

$$\begin{aligned} \det(A + B) &= (\det P)^2 \det(I_n + D) \\ &= (\det P)^2 \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \\ &\geq (\det P)^2 \left(1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i\right) \\ &= (\det P)^2 + \det({}^tP) \prod_{i=1}^n \lambda_i \det P = \det A + \det B \end{aligned}$$

- (b) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX(A + B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geq 0$ et donc $A + B \in S_n^+$, ainsi $\det(A + B) \geq 0$.
Si $A \in S_n^{++}$ ou $B \in S_n^{++}$, alors l'inégalité est toujours vérifiée. Maintenant soit A et B dans $S_n^+ \setminus S_n^{++}$, alors $\det A = \det B = 0$ et dans ce cas aussi on a $\det(A + B) \geq \det A + \det B$.
6. (a) On a $tA + (1 - t)B = {}^tP(tI_n + (1 - t)D)P$ et donc

$$\det(tA + (1 - t)B) = (\det P)^2 \prod_{i=1}^n (t + (1 - t)\lambda_i).$$

- (b) La fonction $\ln$ étant concave, donc pour tout i , $\ln(t + (1 - t)\lambda_i) \geq t \ln 1 + (1 - t) \ln \lambda_i$ et donc

$$\ln(\lambda_i^{1-t}) \leq \ln(t + (1 - t)\lambda_i)$$

et par conséquent

$$t + (1 - t)\lambda_i \geq \lambda_i^{1-t}.$$

(c) D'après l'inégalité précédente, on a :

$$\begin{aligned}
 \det(tA + (1-t)B) &= (\det P)^2 \prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i) \\
 &\geq (\det P)^2 \prod_{i=1}^n \lambda_i^{1-t} \\
 &\geq (\det P)^{2t} (\det P)^{2(1-t)} \prod_{i=1}^n \lambda_i^{1-t} \\
 &= (\det A)^t (\det B)^{1-t}
 \end{aligned}$$

7. (a) Pour $S \in S_n^+$, on définit la suite $(S_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ par $S_p = S + \frac{1}{p}I_n$ qui tend vers S quand p tend vers l'infini, avec $S_p \in S_n^{++}$ car ${}^t X S_p X = {}^t X S X + \frac{1}{p} X X > 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
- (b) Soient $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ deux suites de S_n^{++} telles que $\lim_{p \rightarrow \infty} A_p = A$ et $\lim_{p \rightarrow \infty} B_p = B$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$(\det(A_p + B_p))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A_p)^{\frac{1}{n}} + (\det B_p)^{\frac{1}{n}}$$

et comme l'application $\det$ est continue, alors on obtient, par passage à la limite dans l'inégalité précédente :

$$(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}$$

PARTIE III : THÉORÈME DE CHOLESKI

8. (a) L'égalité ${}^t T_1 T_1 = {}^t T_2 T_2$ entraîne $T_1 T_2^{-1} = (T_2 T_1^{-1})$ et comme $\mathcal{T}$ est un groupe, alors $T_1 T_2^{-1}$ est triangulaire supérieure et inférieure à la fois, donc nécessairement $T_1 T_2^{-1} = I_n$, donc $T_2 = T_1$ est par conséquent T est unique.

(b) Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, on a bien ${}^t T T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 2 & & n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} = A$

Remarque : Notons q la forme quadratique canoniquement associée à A . On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 2 & & n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix};$$

A est somme des matrices A_r définie par $A_r(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j \geq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et $1 \leq r \leq n$. On en déduit la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p=i}^n x_p \right)^2.$$

Les formes linéaires du membre de droite étant linéairement indépendantes, on peut affirmer que q est définie positive. Autrement dit, la matrice $A \in S_n^{++}$

9. *Un peu d'informatique* La matrice T est obtenue par la méthode qui consiste à résoudre le système $n^2 \times n^2$:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n t_{ik} t_{jk} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} t_{ik} t_{jk}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

en calculant d'abord la première colonne de T (correspondant à $i = 1$ dans le système) :

$$\begin{cases} t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \\ t_{21} = \frac{a_{12}}{t_{11}}, \\ \vdots \\ t_{n1} = \frac{a_{1n}}{t_{11}} \end{cases}$$

puis la seconde colonne (en fixant $i = 2$), et ainsi de suite jusqu'à déterminer t_{nn} .

10. Inégalité d'Hadamard

- (a) Puisque $S \in S_n^{++}$, alors ${}^t E_i S E_i = a_{ii} > 0$ (où E_i désigne la matrice du i ème vecteur de la base canonique), donc on peut définir la matrice $B = D S D$ avec

$$D = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}}\right),$$

il est clair que $B \in S_n^{++}$ et donc

$$\sqrt[n]{\det S (\det D)^2} = \sqrt[n]{\det B} \leq \frac{1}{n} \text{trace}(B),$$

$$\text{d'où } \det S (\det D)^2 \leq 1 \text{ car } b_{ii} = 1 \text{ et donc } \det S \leq \frac{1}{(\det B)^2} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

- (b) On a $\det({}^t M M) \leq \prod_{i=1}^n c_{i,i}$ où $c_{i,i} = \sum_{k=1}^n ({}^t A)_{i,k} a_{k,i} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2$, mais :

$$\det({}^t M M) = \det({}^t M) \det(M) = \det(M)^2,$$

$$\text{on a donc } |\det(M)| \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (inégalité d'Hadamard).}$$

• • • • •