E3A 2015 – MP – Maths 2
Corrigé

Partie I.

1. Voir le cours.
2. Puisque $\rho \in D(0,R)$, la série $\sum a_n\rho^n$ converge ; son terme général tend donc vers 0, donc est borné, d'où le résultat.
3. Soit M vérifiant $|a_n\rho^n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $M \leqslant 1$, alors $M \leqslant 1^n$ pour tout n ; sinon, $M \leqslant M^n$ pour tout n. En prenant $K = \max\{1, M\}$, on a donc bien $|a_n| \leqslant (K/\rho)^n$ pour tout n.
4. On raisonne par récurrence sur n. Le résultat est clair pour $n = 0$; supposons le vrai jusqu'à un rang $n-1 \geqslant 0$. Alors, au rang n, $\quad |b_n| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_j|\,|b_{n-j}| \quad$ et $0 \leqslant n-j \leqslant n-1$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir
$$|b_n| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{K}{\rho}\Big)^j\Big(\frac{2K}{\rho}\Big)^{n-j} = \Big(\frac{K}{\rho}\Big)^n\sum_{i=0}^{n-1}2^i = \Big(\frac{K}{\rho}\Big)^n\ \frac{2^n-1}{2-1} \leqslant \Big(\frac{2K}{\rho}\Big)^n$$
où l'on a entre autres posé $i = n-j$ à la deuxième étape ; cela achève la récurrence.
5. Posons $r = \dfrac{\rho}{2K}$. Alors, $r > 0$ et, pour tout $t \in\,]0, r[$, $\quad |b_nt^n| \leqslant \Big(\dfrac{t}{r}\Big)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On sait qu'alors le rayon de convergence de la série entière $\sum b_nt^n$ est au moins égal à r, donc est strictement positif.
6. Question étrangement formulée. En termes de séries entières, on sait que, pour tout $z \in D(0,R')$, le nombre $S(z)T(z)$ est la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_nz^n$, où, pour tout n, $\quad c_n = \sum_{j=0}^{n} a_jb_{n-j}$.
On a donc $c_0 = a_0b_0 = 1$; et, pour tout $n \geqslant 1$, $\quad c_n = b_n + \sum_{j=1}^{n} a_jb_{n-j} = 0 \quad$ par définition de (b_n).
7. On a donc $S(z)T(z) = 1$ pour tout $z \in D(0,R')$, ce qui établit le résultat annoncé.

Partie IIA.

1. Les théorèmes usuels montrent que la restriction de f à $\mathbb{R}$ est continue en chaque point des ouverts $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
En 0, on utilise le DL_1 de e^x : au voisinage de 0, $e^x = 1 + x + o(x)$ et donc $\quad \dfrac{e^x-1}{x} = 1 + o(1) \quad$ pour x non nul. La restriction de f à $\mathbb{R}$ a donc bien pour limite $1 = f(0)$ en 0.
2. On a $e^z = e^xe^{iy}$ d'où $\mathrm{Re}(e^z-1) = e^x\cos y - 1$ et $\mathrm{Im}(e^z-1) = e^x\sin y$.
3. Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = 0$. La question 2. donne $e^x\sin y = 0$, d'où l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = k\pi$; puis $e^x\cos y = (-1)^ke^x = 1$, d'où $x = 0$ et k pair. Enfin, $f(0) = 1$, le couple $(x,y) = (0,0)$ n'est donc pas solution.
Inversement, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $e^{2in\pi} = 1$; l'ensemble des solutions est donc $\{2in\pi\,;\, n \in \mathbb{Z}^*\}$.
Remarque : la forme module-argument paraît plus adaptée pour résoudre l'équation.
4. Soit $z \in D(0,2\pi)$; alors, $|z| < 2\pi$ et donc, d'après la question précédente, $f(z) \neq 0$; la fonction g est donc bien définie sur $D(0,2\pi)$.
5. (a) On sait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$, le rayon de convergence étant infini (par exemple parce que $z^k/k!$ tend vers 0 pour tout z).
   (b) Pour tout $z \neq 0$, on a donc $\quad f(z) = \dfrac{1}{z}\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!} - 1\Big) = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k!} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{z^j}{(j+1)!} \quad$ en posant $j = k-1$.
   Puisque $f(0) = 1$, l'égalité est encore vraie en 0.

6. La série entière $U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ a un rayon de convergence non nul, et $u_0 = 1$; la partie I. garantit qu'il existe $R > 0$ tel que $1/U(z) = g(z)$ soit défini et somme d'une série entière $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ sur $D(0, R)$.

7. (a) Pour tout $t \in]-2\pi, 2\pi[$, $\quad G(t) - G(-t) = 2t + \dfrac{2t}{e^t - 1} - \dfrac{2t}{e^{-t} - 1} = 2t\Big(\dfrac{(e^t - 1) + 1 - e^t}{e^t - 1}\Big) = 0$ d'où le résultat.

   (b) Par combinaison linéaire, G est développable en série entière sur $]-R, R[$, et les coefficients de rang impair de son développement sont tous nuls.
   Pour $t \in]-R, R[$, on a $G(t) = t + 2V(t) = 1 + (1 + 2b_1)t + \sum_{k=2}^{+\infty} 2b_k t^k$; on a donc $b_1 = -1/2$, et $b_k = 0$ pour tout $k \geqslant 3$ impair.

Partie IIB.

1. La restriction de g à $]-2\pi, 2\pi[$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$; donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = g^{(n)}(0)/n!$ est réel.
2. On sait déjà que $\gamma_1 = 1$, $\gamma_1 = -1/2$ et $\gamma_3 = 0$. Pour calculer γ_2, on peut par exemple effectuer un DL_2 de g : au voisinage de 0,

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{t}{t + t^2/2 + t^3/6 + o(t^3)} = \frac{1}{1 + t/2 + t^2/6 + o(t^2)} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + o(t^2)$$

   et donc $\gamma_2 = 1/12$.

3. On sait que, pour tout z, $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}$. D'après la partie I., si l'on pose $b_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = -\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n-j}}{(j+1)!} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(n-k+1)!}$, alors la série entière $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a un rayon de convergence R non nul, et, au voisinage de 0, $T(z) = 1/f(z) = g(z)$.
   Par unicité du développement en série entière, on a donc $b_n = \gamma_n$ pour tout n ; en particulier, pour tout $n \geqslant 1$, $\gamma_n = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!}$, ce qui fournit la relation demandée.
   Remarque : il est peut-être plus simple d'écrire que la série entière produit de celle de f par celle de g est la série entière de la constante 1.

4. On a $\gamma_0 = 1 \in \mathbb{Q}$; et, si $\gamma_k \in \mathbb{Q}$ jusqu'au rang $n-1$, alors la relation $\gamma_n = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!}$ montre que $\gamma_n \in \mathbb{Q}$; par récurrence, les coefficients γ_n sont donc tous rationnels.
5. Vu en IIA.7.(b) : $\gamma_n = 0$ pour $n \geqslant 3$ impair.

Partie III.

1. Pour tout $t < \ln 2$, on a $0 < e^t < 2$ donc $e^t - 1 \in]-1, 1[$; on peut donc prendre $I =]-\ln 2, \ln 2[$.

   Remarque : puisque le rayon de convergence de la série $S(z)$ est au moins 1, la fonction S est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$; et h est de classe C^∞ sur I, et $h(I) \subset]-1, 1[$. La fonction S_h, qui est en fait la composée $S \circ h$, est donc de classe C^∞ sur I. Le reste de la partie III. est donc superflu...

2. La série $\sum a_n u^n$ converge au moins pour $u \in]-1, 1[$, et $h(t) \in]-1, 1[$ par hypothèse ; donc $\sum a_n h(t)^n$ converge.
3. (a) La fonction exponentielle est continue sur le segment K, donc y est bornée ; on peut toujours choisir un majorant de sa valeur absolue (?) qui soit strictement positif.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons f_n la fonction $t \longmapsto a_n h(t)^n$. La fonction h est de classe C^1 sur I, de dérivée $t \longmapsto -e^t$; donc, pour tout $n \geqslant 1$, f_n est de classe C^1 sur I, de dérivée $-na_n h(t)^{n-1}e^t$.

Soit K un segment inclus dans I. La fonction h est alors bornée et atteint ses bornes sur K ; si D_K est la borne supérieure de $|h|$ sur K, on a donc $D_K < 1$ (borne atteinte et $|h(t)| < 1$ sur I).

On a donc $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in K \quad |f_n'(t)| \leqslant C_K n a_n (D_K)^{n-1}$. On sait que la série dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$; puisque ce rayon est au moins 1, la série $C_K n a_n (D_K)^{n-1}$ converge.

Par suite, la série $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur K ; puisque la série $\sum f_n$ y converge simplement, on sait que sa somme, S_h, est de classe C^1 sur I, de dérivée $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$. Cela étant vrai pour tout segment $K \subset I$, la fonction S_h est finalement de classe C^1 sur I.

(c) Considérons la fonction $\Phi : z \longmapsto (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$. Comme vu plus haut, la série entière $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$, donc au moins égal à 1 ; et $z-1$ est un polynôme, cas particulier de série entière de rayon de convergence infini. Le produit des deux est donc la somme d'une série entière $\sum u_n z^n$ de rayon de convergence au moins égal à 1.

D'autre part, on a vu en (b) que, pour $t \in I$, $\Phi\big(h(t)\big) = S_h'(t)$, ce qui achève la démonstration.

4. L'indication étant optionnelle, je m'en dispense. Supposons établi que S_h est de classe C^k sur I, ce que l'on a déjà fait pour $k = 1$.

La série entière $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1, donc vérifie les mêmes hypothèses que la série $\sum a_n z^n$. On peut donc aussi conclure que $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}h^n$ est de classe C^k sur I. La question 3.(b) montre alors que S_h' est elle aussi de classe C^k sur I, et donc S_h y est de classe C^{k+1}.

Par récurrence, la fonction S_h est donc de classe C^k pour tout k, donc de classe C^∞ sur I.

Partie IV.

1. On sait que, pour tout $x \in\,]-1,1[$, $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{x^j}{j} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}$.

Soit $t \in I \setminus \{0\}$. Par définition de I, on a $1 - e^t \in\,]-1,1[$; par suite,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(1-e^t)^k}{k+1} = \frac{1}{1-e^t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(1-e^t)^{k+1}}{k+1} = \frac{\ln e^t}{1-e^t} = \frac{1}{f(t)} = g(t)$$

La relation est trivialement vérifiée pour $t = 0$.

2. (a) Voir le cours.

(b) Pour $k = 0$, il n'existe pas d'entier naturel n tel que $n < k$, la phrase est donc vraie. Pour $k = 1$, le seul n à examiner est 0, et on a effectivement $(h^1)^{(0)}(0) = h(0) = 0$.

Supposons le résultat établi à un rang k. Soit alors $n < k+1$; en écrivant $h^{k+1} = h^k \times h$, la formule de Leibniz donne

$$(h^{k+1})^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(h^k)^{(j)}(0)h^{(n-j)}(0)$$

Pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, on a $j \leqslant n-1 < k$, et donc $(h^k)^{(j)}(0) = 0$ par hypothèse de récurrence ; pour $j = n$, c'est le terme $h^{(n-j)}(0) = h(0)$ qui est nul ; tous les termes de la somme sont donc nuls, ce qui achève la récurrence.

(c) Soient $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < k$ et H une fonction de classe C^∞ sur I. Alors

$$(Hh^k)^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(h^k)^{(j)}(0)H^{(n-j)}(0)$$

Pour tout $j \leqslant n$, on a $(h^k)^{(j)}(0) = 0$ d'après (b), puisque $j \leqslant n < k$; on a donc bien $(Hh^k)^{(n)}(0) = 0$.

(d) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$; on peut alors écrire

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{h(t)^{k-(n+1)}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{h(t)^j}{j+n+2}$$

On vérifie aisément que la série entière $\sum \dfrac{z^j}{j+n+2}$ a un rayon de convergence égal à 1. En appliquant les résultats de la partie III. à cette série, on voit que la fonction $H : t \longmapsto \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{h(t)^j}{j+n+2}$ est de classe C^∞ sur I.

On peut donc appliquer le résultat de la question (c) : puisque $n < n+1$, la dérivée n-ème de $h^{n+1}H$ s'annule en 0. Puisque, pour tout $t \in I$, $g(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1}H(t)$, on en déduit immédiatement le résultat demandé.

3. (a) Soit $t \in I$. Alors $h^k(t) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} e^{jt}$. Pour $n \geqslant 1$, le terme d'indice 0, constant, disparaît par dérivation, donc $(h^k)^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^n e^{jt}$. Il ne reste qu'à prendre $t = 0$ pour obtenir la relation demandée.

(b) Soit $n \geqslant 1$. On sait que $\gamma_n = g^{(n)}(0)/n!$. En tenant compte du fait que le terme d'indice 0 est nul dans l'expression de $g^{(n)}(0)$ trouvée en 2.(d), la question précédente donne donc

$$\gamma_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^j}{k+1} \binom{k}{j} j^n$$