

ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1986

MATHEMATIQUES I
(3 pages dactylographiées)

M

On pose, pour tout entier $n > 0$:

$$u_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{2n} dt$$

Le but du problème est, dans la première partie, la recherche d'un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. La deuxième partie traite des préliminaires nécessaires au calcul de u_n , calcul qui fait l'objet de la troisième partie.

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I ; la partie III peut être traitée en admettant les résultats de la partie II.

PREMIERE PARTIE

On pose, n étant un entier naturel et a un réel strictement positif :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt \quad ; \quad J_n(a) = \int_0^a \left(1 - \frac{t^2}{a^2} \right)^n dt$$

On admet que, lorsque n tend vers $+\infty$, $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

I.1. Etablir que u_n existe pour tout n entier strictement positif.

I.2. Soit, pour tout $a > 0$, $M(a) = \sup_{t \in [a, +\infty[} \left| \frac{\sin t}{t} \right|$;

Montrer que $M(a) < 1$ et que, pour tout n entier > 0 ,

$$\int_a^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{2n} dt \leq 2(M(a))^{2n-2}$$

I.3. Exprimer la quantité $J_n(a)$, où $a > 0$, en fonction de a et d'un terme de la suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

I.4. Etablir que, pour tout $t \in]0, \sqrt{6}]$

$$\frac{\sin t}{t} \geq 1 - \frac{t^2}{6} \geq 0$$

I.5. Dédire de ce qui précède l'inégalité

$$u_n \geq \sqrt{6} \cdot I_{4n+1}$$

I.6. a) Montrer que, pour tout $\lambda > \sqrt{6}$, il existe $\mu \in]0, \lambda]$ tel que, pour tout $t \in]0, \mu]$

$$0 \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1 - \frac{t^2}{\lambda^2}$$

b) En déduire l'inégalité, valable pour tout entier $n > 0$:

$$u_n \leq J_{2n}(\lambda) + 2(M(\mu))^{2n-2}$$

I.7. Déterminer la limite de $\frac{u_n}{I_{4n+1}}$ lorsque n tend vers $+\infty$, et donner un équivalent très simple de u_n .

Tournez la page S. V. P.



DEUXIEME PARTIE

Dans toute cette partie, f désigne une application continue et bornée de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} et λ un réel ≥ 0 . On désigne respectivement par $F(\lambda)$ et $G(\lambda)$ les valeurs des intégrales

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-\lambda t} dt$$

lorsque ces intégrales convergent.

II.1. Montrer que $F(\lambda)$ et $G(\lambda)$ existent pour tout $\lambda > 0$.

II.2. Donner la limite de $F(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

II.3.a) Etablir, pour tout $u \neq 0$, l'inégalité

$$\left| \frac{e^{-u} - 1}{u} + 1 \right| \leq \frac{|u|}{2} e^{|u|}$$

b) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $F'(\lambda)$ existe et que $F'(\lambda) = -G(\lambda)$.

II.4. On suppose ici de plus que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente.

Etablir qu'alors F est continue en 0.

TROISIEME PARTIE

Dans toute cette partie, n est un entier strictement positif et λ un réel positif au sens large.

III.1. Etablir la convergence de l'intégrale

$$\Phi_n(\lambda) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{2n} e^{-\lambda t} dt$$

III.2. On définit ainsi une application Φ_n de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} . Etablir qu'elle est continue en 0 et de classe C^{2n} sur $]0, +\infty[$.

III.3. Démontrer, pour tout $\lambda > 0$, les formules :

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(2n)}(\lambda) &= \int_0^{+\infty} (\sin t)^{2n} e^{-\lambda t} dt \\ \Phi_n^{(2n)}(\lambda) &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n}^k \frac{\lambda}{\lambda^2 + 4(n-k)^2} \end{aligned}$$

III.4. Trouver une constante α_n telle que, pour tout $\lambda > 0$,

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} (\alpha_n \lambda^{n-1} \Phi_n(\lambda)) = \frac{1}{\lambda}$$

III.5. On pose

$$\theta_n(x) = \int_0^x \frac{(x-u)^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{u}{1+u^2} du$$

a) Etablir que, pour tout x réel,

$$\theta_n^{(2n)}(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

b) Montrer qu'il existe un triplet unique A_n, B_n, Q_n de polynômes, A_n et B_n étant des polynômes en x et Q_n un polynôme en x et u , tels que, pour tout x et tout u

$$u(x-u)^{2n-1} = (1+u^2) Q_n(x,u) + A_n(x) u + B_n(x)$$

Que dire de la parité de A_n et de celle de B_n ?

Calculer $B_n(0)$.

c) En déduire l'existence d'un polynôme C_n tel que, pour tout x :

$$(2n-1)! \theta_n(x) = C_n(x) + \frac{1}{2} A_n(x) \int_n (1+x^2) + B_n(x) \text{Arc tg } x$$

d) Démontrer qu'il existe un polynôme H_n tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((2n-1)! \theta_n(x) - A_n(x) \int_n x - H_n(x)) = 0$$

et montrer que $H_n(0) = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2}$

III.6. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$:

$$\Phi_n(\lambda) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{2n}^k (n-k)^{2n-1} \theta_n\left(\frac{\lambda}{2(n-k)}\right) + \gamma_n \lambda^{2n-1} \int_n \lambda + V_n(\lambda)$$

où γ_n est une constante que l'on précisera, et V_n un polynôme dont on ne demande pas l'expression.

III.7. Démontrer l'existence de deux polynômes S_n et T_n tels que, pour tout $\lambda > 0$:

$$\Phi_n(\lambda) = S_n(\lambda) \int_n \lambda + T_n(\lambda) + \varepsilon_n(\lambda)$$

avec $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varepsilon_n(\lambda) = 0$

Exprimer T_n à l'aide des symboles H_n, A_n et V_n .

III.8. Quelle est la limite de $\Phi_n(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$?

Qu'en résulte-t-il pour les polynômes S_n et T_n ? En déduire la valeur de $V_n(0)$, puis celle de u_n .

Pour $n = 1, 2, 3$, mettre u_n sous la forme $\frac{p_n}{q_n}$, où p_n et q_n sont des entiers naturels premiers entre eux.

*

M