

**PREMIER EXERCICE.**

a.  $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{n+1}$  de sorte que  $\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$ .

Il en découle que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$ .  $\square$

b.  $\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{(k-1)!} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!}$  donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = 2e^2$ .  $\square$

**SECOND EXERCICE.**

Il est immédiat que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux donc, d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge normalement sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$ .

a. Avec les notations classiques, il vient que  $b_n = 0$  puisque  $f$  est paire et

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt. \text{ Donc } a_0 = \frac{2\pi^2}{3} \text{ et } a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2} \text{ par}$$

deux intégrations par parties. Ainsi  $f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$  pour tout réel  $t$ .  $\square$

b. En particulier pour  $t = 0$  il vient  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$  et pour  $t = \pi$  :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .  $\square$

Par ailleurs  $\sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n^2}$  d'où par passage à la limite (licite car les trois séries convergent)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad \square$$

c. D'après le théorème de Parseval de convergence quadratique, on a  $\|f\|_2^2 = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ .

Or  $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t)^2 dt = \frac{\pi^4}{5}$ . D'où  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ .  $\square$

**PROBLÈME.**

**Découverte des fonctions tests.**

1. Si  $\bar{A}$  est compacte alors elle est bornée donc  $A$  également puisque  $A \subset \bar{A}$ . Réciproquement si  $A$  est bornée alors il existe  $R > 0$  tel que  $A \subset [-R, R]$  ce qui entraîne  $\bar{A} \subset [-R, R] = [-R, R]$  et donc  $\bar{A}$  est bornée donc compacte car fermée.  $\square$

2. Il est immédiat que  $u$  est continue à support compact ( $[-2, 2]$ ) mais n'est pas une fonction test car elle n'est pas dérivable en 2 ( $u'_d(2) = 0$  et  $u'_g(2) = -4$ ).  $\square$

La fonction sinus n'est pas une fonction test car elle n'est pas à support compact (la suite  $(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)_{n \in \mathbb{N}}$  est incluse dans le support qui de ce fait n'est pas borné).  $\square$

3. Soit le prédicat  $\mathcal{P}_k$  : " $h^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x})h(x)$  pour tout  $x > 0$  avec  $P_k$  polynôme de degré  $2k$ ".  $\mathcal{P}_0$  est vrai et en

supposant que  $\mathcal{P}_k$  soit vrai pour  $k \leq n$  il vient  $h^{(n+1)}(x) = Q(\frac{1}{x})h(x)$  pour  $x > 0$  avec  $Q(u) = u^2(P_n(u) - P'_n(u))$  qui est bien un polynôme de degré  $2 + 2n = 2(n+1)$  puisque  $P_n - P'_n$  est de degré  $2n$ .  $\square$

Il en découle par croissances comparées que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h^{(k)}(x) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Par ailleurs  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -\infty, 0[$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h^{(k)}(x) = 0$ . Comme en outre  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , le théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$  itéré prouve que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  (et  $h^{(k)}(0) = 0$  pour tout entier  $k$ ).  $\square$

$h$  n'est pas une fonction test car de support  $[0, +\infty[$  non borné. Elle n'est pas non plus développable en série entière au voisinage de 0 car si elle l'était on aurait  $h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$  au voisinage de 0 donc  $h$  serait identiquement nulle au voisinage de 0 ce qui n'est pas.  $\square$

4.  $x$  appartient au support de  $\varphi$  si et seulement si  $1 - x^2 \geq 0$  donc le support de  $\varphi$  est le segment  $[-1, 1]$ . Comme  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  (question 3), par composition la fonction  $\varphi$  l'est également ce qui prouve que  $\varphi$  est une fonction test.

$\varphi$  est paire, nulle pour  $x \geq 1$  et comme  $\varphi'(x) = -2xh'(1 - x^2)$  elle est décroissante sur  $[0, 1]$ . Allure du graphe immédiate.  $\square$

Pour  $-\infty < a < b < +\infty$  la fonction  $\varphi_{a,b} : x \mapsto h(-(x-a)(x-b))$  est de même une fonction test de support  $[a, b]$  et si  $[a, b] \cap [c, d]$  est vide alors  $\varphi_{a,b} + \varphi_{c,d}$  est une fonction test de support  $[a, b] \cup [c, d]$ .  $\square$

5. Une telle fonction est nulle au voisinage de l'infini donc y admet des limites nulles.  $\square$

6.  $\varphi$  est continue donc localement intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Étant nulle au voisinage de  $-\infty$  et  $+\infty$ , elle est intégrable en  $-\infty$  et  $+\infty$  donc sur  $\mathbb{R}$  et  $I = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = \int_{-1}^1 \varphi(t) dt > 0$  car  $\varphi$  est positive et en outre strictement positive et continue en 1.  $\square$

Il en découle  $\rho : x \mapsto \frac{1}{I}\varphi(x)$  est une fonction test de support  $[-1, 1]$ , positive et telle que  $\int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = 1$ .  $\square$

Il en résulte immédiatement que  $\rho_n$  est une fonction test positive de support  $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$  telle que  $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t) dt = 1$   $\square$

Il existe une suite régularisante c'est à dire une suite  $(\rho_n)$  de fonctions tests positives telles que :  
 $\text{Supp}(\rho_n) = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$  et  $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t) dt = 1$ .  $\square$

### Approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ par des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ ou par des fonctions tests.

7. Si la suite  $(P_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  alors elle satisfait le critère de Cauchy de convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ . En particulier pour  $\varepsilon = 1$ , il existe  $N$  tel que  $\|P_p - P_q\|_\infty \leq 1$  pour  $p, q \geq N$ . Ainsi  $\|P_n - P_N\|_\infty \leq 1$  pour  $n \geq N$ .  $\square$

Il en découle que  $P_n - P_N$  est une constante  $\lambda_n$  pour  $n \geq N$  car sinon ce serait un polynôme de degré au moins 1 donc non borné sur  $\mathbb{R}$ .

En traduisant par exemple la convergence de la suite numérique  $(P_n(0))$ , il vient que la suite  $(\lambda_n)$  est convergente vers  $\lambda = f(0) - P_N(0)$ .

Comme  $P_n(x) = P_N(x) + \lambda_n$ , la suite  $(P_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $P_N + \lambda$ . Ainsi  $f = P_N + \lambda$  est bien un polynôme.  $\square$

8.  $z_n$  est continue affine par morceaux, identiquement égale à 1 sur  $[-n, n]$ , nulle sur  $]-\infty, -(n+1)[ \cup ]n+1, +\infty[$ . Pour tout  $x_0$  fixé quelconque dans  $\mathbb{R}$  on a  $z_n(x_0) = 1$  pour  $n \geq \text{Int}(x_0) + 1$  ce qui prouve que la suite  $(z_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction constante égale à 1.

La convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}$  car  $\|z_n - 1\|_\infty = 1$ .

En traduisant le fait que  $g$  est nulle à l'infini avec  $\varepsilon = 1$  il vient qu'il existe  $A > 0$  tel que  $|g(x)| \leq 1$  pour  $|x| \geq A$ . Par ailleurs  $g$  est bornée car continue sur le compact  $[-A, A]$ . Il en découle que  $g$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Naturellement la suite  $(\alpha_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers une limite  $\ell \geq 0$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A_\varepsilon$  tel que  $|g(x)| \leq \varepsilon$  pour  $|x| \geq A_\varepsilon$  puisque  $g$  est nulle à l'infini. Donc  $\alpha_n \leq \varepsilon$  pour  $n \geq \text{Int}(A_\varepsilon) + 1$ . Ce qui prouve que  $\ell = 0$ .  $\square$

Pour  $|x| \leq n$  on a  $g_n(x) = g(x)$  donc  $|g(x) - g_n(x)| = 0$ .

Pour  $|x| \geq n + 1$  on a  $g_n(x) = 0$  donc  $|g(x) - g_n(x)| = |g(x)| \leq \alpha_n$ .

Pour  $n \leq |x| \leq n+1$  on a  $g_n(x) = (n+1-|x|)g(x)$  donc  $|g(x) - g_n(x)| = |(|x|-n)g(x)| = (|x|-n)|g(x)| \leq |g(x)| \leq \alpha_n$ .

En conclusion :  $\|g - g_n\|_\infty \leq \alpha_n$  pour tout  $n$ .  $\square$

Comme la suite  $(\alpha_n)$  tend vers 0, il en résulte que la suite  $(g_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $g$ .

Ainsi une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  nulle à l'infini est-elle limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de fonctions continues à support compact.  $\square$

9. Pour tout  $x, t \mapsto g(t)f(x-t)$  est continue à support compact (inclus dans  $\text{Supp}(g)$ ) donc intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

De même pour  $t \mapsto f(t)g(x-t)$  (support inclus dans  $[-R+x, R+x]$ ).

Le changement de variable  $t \mapsto u = x-t$ , qui est bien un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  prouve que  $f * g = g * f$ .

Ainsi peut-on définir le produit de convolution d'une fonction continue et d'une fonction continue à support compact et cette opération est commutative.  $\square$

Si  $f$  est la fonction constante sur  $\mathbb{R}$  égale à 1, alors  $f * \rho$  est également la fonction constante égale à 1 qui n'est pas à support compact.  $\square$

**10** Si  $x > R + S$  on a, pour tout  $t \in [-R, R]$ ,  $x - t > (R + S) - R = S$  donc  $f(x - t) = 0$ .

Donc  $(f * g)(x) = (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x - t) dt = \int_{-R}^R g(t)f(x - t) dt = 0$ . De même si  $x < -(R + S)$ .

| Ainsi le produit de convolution de deux fonctions continues à support compact est il à support compact.  $\square$

**11** Si  $x \in [-a, a]$  et si  $t > a + R$  alors  $x - t < a - (a + R) = -R$  donc  $g(x - t) = 0$ . De même si  $t < -a - R$ .

Ainsi  $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t) dt = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g(x - t) dt$ .  $\square$

Pour prouver que  $f * g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et y est en outre dérivable sous le signe intégrale, il suffit de prouver que cela est le cas pour sa restriction à tout intervalle  $] - a, a[$  avec  $a > 0$ .

Comme cette restriction est en fait une intégrale propre à paramètre, il suffit de vérifier que  $h : (x, t) \mapsto f(t)g(x - t)$  est continue sur  $] - a, a[ \times ] - a - R, a + R[$  et partiellement dérivable par rapport à  $x$  et que  $\frac{\partial h}{\partial x}$  est également continue sur  $] - a, a[ \times ] - a - R, a + R[$ .

Or comme  $f$  et  $g$  sont continues, il en va de même pour  $h$  et comme  $g$  est en outre de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$  existe et vaut  $f(t)g'(x - t)$  qui est bien continue.

Ainsi  $f * g$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$  il vient (avec  $a$  tel que  $a > |x|$ ) :

$$(f * g)'(x) = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g'(x - t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g'(x - t) dt = (f * g')(x).$$

Par itération claire :

| Si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et si  $g$  est à support compact et de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}$  alors  $f * g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}$  et  $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$  pour tout  $k \leq n$ .  $\square$

**12** Comme  $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t) dt = 1$  on a  $f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\rho_n(t) dt$ . Donc, pour tout réel  $x$ , on a :

$$(f * \rho_n)(x) - f(x) = (\rho_n * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)(f(x - t) - f(x)) dt = \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(t)(f(x - t) - f(x)) dt$$

d'où l'inégalité demandée (puisque  $\rho_n$  est positive).  $\square$

Supposons désormais que  $f$  soit en outre uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  et donnons nous  $\varepsilon > 0$  quelconque. Il existe alors  $N = N_\varepsilon$  tel que  $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$  dès que  $|u - v| \leq 1/N$ . Il résulte alors de l'inégalité précédente que :

$$|(f * \rho_n)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(t) dt = \varepsilon \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ et tout } n \geq N \text{ ce qui prouve la convergence uniforme}$$

sur  $\mathbb{R}$  de la suite  $(f * \rho_n)$  vers  $f$ . Or  $f * \rho_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  d'après la question 11. Ainsi :

| Si  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  et si  $(\rho_n)$  est une suite régularisante alors la suite  $(f * \rho_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$ . En particulier  $f$  est uniformément approximable par une suite de fonction  $\mathcal{C}^\infty$   $\square$

Si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et nulle à l'infini (ou plus généralement admet des limites finies à l'infini), il est classique (et facile à vérifier) que  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ . En particulier si  $f$  est à support compact. Mais alors  $f * \rho_n$  est à support compact (question 10) donc est une fonction test. Ainsi :

| Une fonction continue à support compact est limite uniforme d'une suite de fonctions tests.

### Théorème de Whitney.

**13** Si  $f$  est continue,  $F$  est fermé dans  $\mathbb{R}$  en tant qu'image réciproque du singleton  $\{0\}$  qui est un fermé.  $\square$

**14** Si  $x \in Z(d_F)$  alors  $d(x, F) = 0$  donc classiquement  $x \in \overline{F}$  donc  $x \in F$  puisque  $F$  est fermé. Ainsi  $Z(d_f) \subset F$  et comme l'inclusion inverse est évidente, on a  $Z(d_F) = F$ .

Comme l'application  $d_F$  est continue (et même lipschitzienne de rapport 1, résultat classique de cours), cela prouve que tout fermé de  $\mathbb{R}$  est du type  $Z(f)$  où  $f$  est continue.

Mais cela ne prouve pas le théorème de Whitney car  $d_F$  n'est pas forcément  $\mathcal{C}^\infty$ . En effet dans l'exemple proposé,  $d_F$  est la fonction paire telle que  $d_F(x) = 1 - x$  pour  $x \in [0, 1]$  et  $d_F(x) = 0$  si  $x \geq 1$  et cette fonction n'est pas dérivable en 1.  $\square$

**15** Si  $-\infty < a < b < +\infty$  alors  $F = Z(\varphi_{a,b})$  (Cf question 4).

Si  $b = +\infty$  alors  $\varphi_{a,+\infty} : x \mapsto h(x-a)$  est positive, de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $Z(\varphi_{a,+\infty}) = F$ . Idem si  $a = -\infty$ .

Donc si  $F$  est le complémentaire d'un intervalle ouvert  $I$ , borné ou non, il existe une fonction  $\varphi_I$  positive et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $Z(\varphi_I) = F$ .  $\square$

Si  $F$  est le complémentaire de la réunion  $\bigcup_{n=1}^N I_n$  d'un nombre fini d'intervalles ouverts  $I_n$  deux à deux disjoints, alors

$F = Z(\psi)$  avec  $\psi = \sum_{n=1}^N \varphi_{I_n}$  positive et de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .  $\square$

**16** Il reste à établir le résultat lorsque la réunion est dénombrable non finie donc indexable par  $\mathbb{N} : \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$  où les  $I_n$  sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints (avec éventuellement 1 ou 2 d'entre eux non bornés). Ce cas est beaucoup plus délicat.

Notons  $\varphi_n = \varphi_{I_n}$ .

Si  $I_n$  est borné alors  $\varphi_n$  est une fonction test donc toutes ses dérivées sont à support compact donc, pour tout entier  $k$ ,  $\varphi_n^{(k)}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . On note  $M_{n,k} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(x)|$ .

Si  $I_n$  n'est pas borné par exemple  $I_n = ]a, +\infty[$  alors  $\varphi_n(x) = h(x-a)$ . D'après la question 3.a,  $h^{(k)}$  admet une limite nulle en 0 et une limite finie  $P_k(0)$  en  $+\infty$ . Donc  $h^{(k)}$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$  donc sur  $\mathbb{R}$  car nulle sur  $\mathbb{R}^-$ . On peut donc encore considérer  $M_{n,k}$  dans ce cas.

Soit  $\alpha_n$  tel que  $1/\alpha_n = n^2 \max\{M_{n,0}, \dots, M_{n,n}\}$ . Alors on a  $|\alpha_n \varphi_n^{(k)}(x)| \leq 1/n^2$  pour tout réel  $x$ , tout entier non nul  $n$  et tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ .

Soit alors  $\psi = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n$ . Cette série converge normalement sur  $\mathbb{R}$  ainsi que toutes ses séries dérivées. En effet pour

$k$  entier quelconque fixé on a  $|\alpha_n \varphi_n^{(k)}(x)| \leq 1/n^2$  dès que  $n \geq k$  et cela pour tout réel  $x$ . Ce qui prouve que  $\psi$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

En outre comme  $\alpha_n \varphi_n$  est positive, on a  $\psi(x) = 0$  si et seulement si  $\varphi_n(x) = 0$  pour tout  $n$  (car  $\alpha_n > 0$ ) donc si et seulement si  $x$  appartient au complémentaire de la réunion des  $I_n$  c'est à dire à  $F$ .

Le théorème de Whitney est ainsi démontré : si  $F$  est un fermé de  $\mathbb{R}$  il existe une fonction  $\psi$  positive de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $F = Z(\psi)$ .  $\square$

————— FIN —————